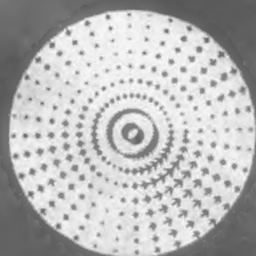
地震学算法理论

计算方法和计算机程序

〔挪〕 Durk' J. Doornbos 主编



地震出版社

地震学算法理论

计算方法和计算机程序

[挪] Durk J. Doornbos 主编

宋仁益 傅淑芳 译

郑治真 校







地震出版社

1992

（京）新登字095号

内 容 提 要

本书是由地震理论和实际应用委员会倡议编写的专著。书中汇集了当前理论地震学中主要研究问题的最新算法。作者是世界各国著名的地震学家。每一种算法都附有计算程序，提供了“建筑块体”和背景材料，使用者可灵活地使用这些块体来构成自己的程序，达到计算目的。因而本书内容中既含有地震学理论与方法，又提供了实际应用的结果性算法。

本书适用于地震学及地球物理勘探专业的科技工作者，也可供有关大专院校的高年级学生及研究生参考。

Seismological Algorithms

Computational Methods and Computer Programs

地震学算法理论

计算方法和计算机程序

［挪］ Durk J.Doornbos 主编

朱仁益 傅淑芳 译

郑治真 校

责任编辑：王 伟

责任校对：李 珺

地震出版社出版

北京民族学院南路9号

一二〇一工厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 15.5印张 416千字

1992年3月第一版 1992年3月第一次印刷

印数 001—400

ISBN 7-5028-0504-4/O.12

（892） 定价：10.00元

前　　言

出版本书和有关程序包的计划是为了适应地震学界的要求，即认为有必要选择一些基本的、先进的方法和算法，以一种便于查找的方式汇编在一起。这些计划于1985年8月在东京召开的国际地震学和地球内部物理学协会(IASPEI)大会上，得到了地震理论委员会和实际应用委员会的支持，并由联合算法分委员会来负责出版这本书。从某种意义上说，这是稍早开展的两个颇为不同项目的自然延续和合成：(1)分委员会在它的前主席Engdahl博士创导下，已在主办一个不断发展的地震算法的文献性项目。1984年，世界资料中心A的报告SE-35总结了这个项目的情况。(2)在他们的《计算物理方法》丛书中，学术出版社(Academic Press)在1972年出版过两卷有关地震学的书(由Bolt教授编的卷11和卷12)。虽然本工作的宗旨不同于以前的出版物，仍然考虑了及时更新问题。本工作的一个重要特点是，这些算法也适用于计算机程序的形式。这些程序全部收集在磁带或磁盘中，且能从固体地球物理世界资料中心A获得。程序的索引附在本书后部。

与世界各地许多同行们紧密合作对完成本项目来说至关重要。我欣赏每一位作者为一并提供正文与程序所作的大量额外工作。我感谢作者们及给过建议、评论的人们。IASPEI的这一项目由联合国教科文组织资助。

联合算法分委员会主席

Durk J.Doornbos

目　录

第三篇　层状介质中的反射率法

第四篇　成层介质中的振型法

第五篇 通用算法和震源

绪　论

目　的

本书及有关程序包中提出的算法所处理的是广范围的地震学问题。然而，我们知道每一个新的研究项目都有要用新程序或对现有程序作修改的计算问题。因此，本书中的算法和程序不一定适合每个用户的特定需要。只是希望给读者提供“建筑块体”及背景材料，以便在读者的程序结构中巧妙地使用这些块体。简言之，本书有双重目的，即：提供有关地震学理论和方法的足够的背景材料；为实际应用提供结果性算法。其中的一些方法是新的；而另外一些则是以最新的专著和研究论文中所载的理论发展为基础，它们列在本书末的参考文献中。鼓励读者去考虑这些工作。

范　围

某些算法是有特殊目的的程序，但许多已成为处理这样一些经常重复的问题，像如何计算体波走时、面波频散曲线、自由振荡本征频率，如何计算振幅、波形和完全地震图或其近似，以及一旦正演问题得到解决，如何在反演问题中应用矩阵法等。在本书中，处理波的传播问题的算法以射线法和广义射线法、反射率法和简正振型法为依据。篇和章的划分反映了方法和目的上的不同。但往往遇到在某一范围或章节中所研究的计算方法，会在另一范围或章节中找到应用。书中有许多这类例子，为了找出“隐藏的”算法，建议读者不单去查寻程序索引和目录，而且去查寻专业术语索引。

适用性

当考虑第一到第四篇中不同方法的适用性时，应记住下列几点：

（1）某些方法是在平面成层介质中，而另一些则是在球状成层介质中推求公式。两类介质的算法都包括在内。实际上，这些算法常常由于对速度-密度模型有采用所谓地球-展平变换的可能性，因而都可应用到不论哪一种介质的情况。有关这一点的资料可从Aki和Richards的专著(1980)中得到。

（2）某些程序计算给定点震源的地震响应，另一些程序却是计算Green函数或简正振型项，震源激发因子的计算留给用户去做。对于矩张量点源表达情况，这些因子很容易得到，且已在好几章中被指出，更详细的说明，请读者参考近期的技术书(Aki和Richards，1980；Kennett，1983)。

（3）虽然第一到第四篇的算法求解的是地震学正演问题，但同样的算法常常也是形成反演方法的主要成分。有几个实例在第五篇中给出。

其他资料

很明显，本书并未包揽所有涉及地震学的计算方法。在选定的题目领域内根据可能，尽量提供各种可供选择的算法，但我们承认，有些重要的算法没有包括在内，其中某些算法包含在世界资料中心A报告SE-35中(Engdahl，1984)。没有涉及或只是沾一点边的题目领域有信号处理方法及三维波动问题中的差分和有限元法。在这些领域内已发表的算法在工程文献中推广、在一些数值分析的书籍中(Press等，1986)常有一些有用的实例。在地球物理文献内，有许多专著也有这些领域的某些算法实例(Robinson，1983；Menke，1984；Claerbout，1985)。

程序库

所有作者都提供了 Fortran 程序，把这些程序汇集在一起，形成一个综合的软件包。程序编排在文件中（每个文件可以多于一个程序）。文件名列表于本书的程序索引中，软件包能从科罗拉多的Boulder世界固体地球物理资料中心A以磁带或磁盘形式得到。应当理解编写程序的风格、Fortran的水平及机器的轻便性等，不同作者提供的，显然是不相同的。这方面的有关资料，附带程序都被编入。应当指出，作者们没有要求程序无误差，计算的数值结果的正确性责任在用户。当然，作者们欢迎对算法提出改进建议。

第　一　篇

一维介质中的射线与体波

第一章　垂直向变化层构成的地球模型中的体波谱合成

V. F. Cormier

（康涅狄格大学地球物理和地质系）

P. G. Richards

（哥伦比亚大学地质科学系和拉蒙-多霍尔地质观测台）

1. 引　言

地球模型参数化方式直接影响着合成地震图的计算方法。本章考虑适用于球对称侧向均匀地球的算法，地球由速度函数参数化，这些速度函数在整个深度上是解析的且在所有厚度范围上都是光滑变化的。用这种方法参数化了的两个地球模型是PEM（Dziewonski等，1975）和PREM（Dziewonski和Anderson，1981）。在这两个模型中，地震波速度由几个适用于很大深度范围的半径为参数的多项式给出，这几个深度范围由少数一阶和二阶间断性分开，例如PREM（图1）给出了用于外核、内核、底地幔、下地幔、上地幔过渡带，低速带，上地幔盖和地壳的速度多项式。使用这两个模型的优点是：与速度对深度的一阶和二阶导数有关的地球物理量的物理意义不会因为参数化而含糊不清。这些量包括分层参数、体积模量的压力导数和Gruneisen参数。应用直接以在厚的区域上是解析的速度模型作基础的模型算法，就有可能直接研究某一特定波形资料对这些量的敏感性。

能够处理这类模型参数化的合成方法有 Ascher 写的配置法(第三篇第二章)和Chapman等写的 WKBJ 法或慢度法(第一篇第二章)，计算延迟时间τ的算法和这里要说的各向同性与横向各向同性模型复转折点的算法补充了Chapman所写的方法，而且能够与WKBJ/慢度法的体波计算中所用的子程序相结合。

但是，WKBJ近似法不能精确计算边界掠入射和邻近边界掠入射时的体波散射和通道效应(图2)。在这些情况中，需要应用一致渐近近似法，即光滑地将行波和波动方程径向分离部分解的指数形式连接起来。这种一致近似法已由Langer(1932，1949)详细说明，且由Olver(1954)予以推广。在非掠入角时，它重新给出非一致的WKBJ近似法，而在掠入角时，则给出非一致的Airy近似法。简单的用一致性近似代替出现在垂直传播基本矩阵中的径向波函数的WKBJ近似，Langer近似就能合并在体波合成问题中。当应用修改过的基本矩阵形式计算折射、反射系数时，能够

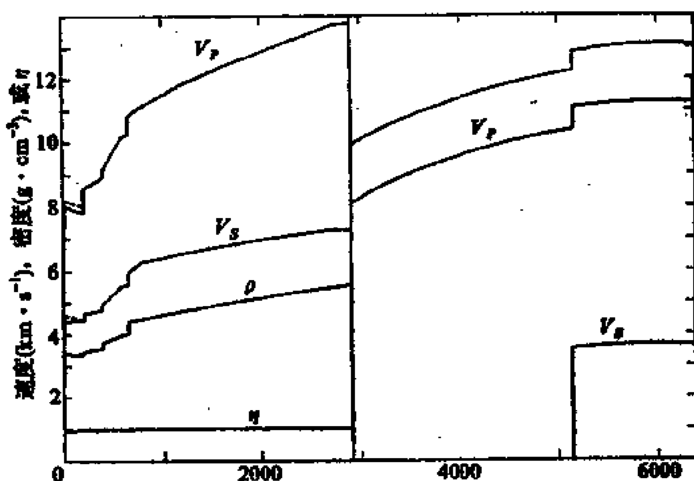


图1 Dziewonski和Anderson(1981)的初步参考地球模型(PREM)是分层很少的模型实例，这些层按速度和密度的一阶或二阶的间断性划分。在每一层中，速度由半径多项式给定

看到Langer近似已简化到一些广义余弦和由Airy函数定义的垂直波函数比的表达式(Richards, 1976)。本章将叙述计算广义余弦和Langer近似垂直波函数的算法。也大致给出了如何将Langer近似合并在计算n层介质中的反射率响应算法(第三篇第一章)。在这种情况中，Langer近似允许每一层有一垂向变化的速度剖面。

2. 实例性体波问题

2.1 复波谱的表达式

为了迅速引进符号及开展讨论，现从考虑一个特殊问题开始。P波形式的复波谱渐近表达式为

$$u_r(r, \Delta_0, \omega)=\frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4}\int_\Gamma \omega^2 p F^P \pi^{(1)}(r_s)\dot{p}\acute{p}\alpha(r) \times \xi(r)\pi^{(1)}(r)Q_l^{(2)}(\cos\Delta_0)dp \qquad (1)$$

P波是由具有地震矩$M_0(\omega)$及辐射花样F^P的地震或者爆破产生的。震源位于半径r_s的点上。它辐射的P波被单一间断面或者几个间断面组成的区域反射为P波，位移的径向分量u_r为位于半径r和距离Δ_0的台站所记录。Γ代表复射线参数(p)平面上的一条积分路径。$l=\omega p-1/2$是复角的阶数。表达式(1)由Scholte(1956)和Richards(1973)推导出，且已引录在Aki和Richards(1980)书中第九章。

函数$Q_l^{(2)}(\cos\Delta)$是Legendre函数的行波分量之一。上行P波函数$\pi^{(1)}$和下行P波函数$\pi^{(2)}$比例于运动方程径向分量R的解，例如取频率的一次方，R满足如下方程：

$$\frac{d^2}{dr^2}(rR)+\omega^2\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)rR=0 \qquad (2)$$

$\xi(r)$定义为$\xi=(d\pi^{(1)}/dr)/(i\omega\pi^{(1)})$。除非P波接近掠入射，$\xi$总能简单取作为在$r$处射线参数$p$的入射平面波的垂直慢度，即$\xi(r)\sim$

$1/\alpha^2-p^2/r^2$。

震源既可用矩张量元素M_{ij}，也可以用描述点剪切位错方向的断层面的走向、倾向和倾伏角进行参数化。不论哪一种情况，这些参数都确定了射线参数的三个不同函数$f_i(p)$的权重w_i，$f_i(p)$构成了F^P。

$$F^P(\phi,\ p)=w_1(\phi)f_1(p)+w_2(\phi)f_2(p)+w_3(\phi)f_3(p) \quad (3)$$

对每个单独f_i，完成对p的积分。加权函数w_i是震源处方位离源角ϕ的函数，它们完全可由矩张量元素或双力偶方向所构成的输入来确定。每一函数f_i的复波谱用快速 Fourier 变换变回到时间域，同时，把由w_i加权的三个基本地震图加在一起。

2.2 算法的轮廓

算法和有关的程序可简单综述如下：

给定：某些层中的解析速度与密度，这些层的说明，射线通过的层间交接面及射线参数积分的积分路径Γ。

计算：位移$u(x,\ t)$：

计算许多实频率ω处的$u(x,\ \omega)$，随后用 FFT(快速 Fourier 变换)将它变换成$u(x,\ t)$；

计算许多复射线参数p处的$u(p,\ \omega)$，随后沿着Γ积分，将它变换成$u(x,\ \omega)$；

在各个层交接面上，由ξ、π和反射/折射系数C组合$u(p,\ \omega)$；

计算垂直慢度ξ和η；

用如下方法计算垂直波函数π和/或σ：

当$\omega\tau>5$时，用WKBJ近似，

当$\omega\tau\leqslant 5$时，用Langer近似；

计算反射/折射系数$C=f(\xi,\eta,\pi,\sigma)$；

组合$u(p,\omega)=f(\xi,\eta,\pi,\sigma,C)$；

用梯形规则进行曲线积分，$u(p,\ \omega)\to u(x,\ \omega)$；

用FFT进行逆Fourier变换$u(x,\ \omega)\to u(x,\ t)$。

垂直波函数π和σ的计算、广义垂直慢度ξ和η的计算以及广义反射/折射系数的计算在2.3—2.8节中叙述。实例问题和积分路径的选择在第3节讨论。第4节讨论延伸和应用到包括内部衰减、横向各向同性、n层反射率和对跖点接收处等问题。

2.3 WKBJ近似

方程式(2)解的WKBJ近似给出了上行为$R=g^{(1)}$、下行为$R=g^{(2)}$的行波，结果是

$$g^{(1),(2)}\sim e^{\mp i\pi/4}\frac{\alpha^{1/2}}{\omega r}\cdot\frac{e^{\pm i\omega\tau}}{\lambda^{1/2}} \tag{4a}$$

其中

$$\lambda=\left[\frac{1}{\alpha^2(r)}-\frac{p^2}{r^2}\right]^{1/2},\qquad \tau=\int_{r_p}^{r_b}\lambda\mathrm{d}r$$

在式(4a)中(此后均类似地表示)，上、下符号相应于上行(1)和下行(2)波。τ的积分下限r_p是转折点半径，或者λ为零处的半径，即$\lambda(r_p)=0$。上限r_b是不连续处的半径，那里不是有震源即为接收器，或者在那里要计算反射/折射系数。

函数$\pi^{(1),(2)}$通过$\pi^{(1),(2)}=(\rho_s/\rho)^{1/2}\alpha_s(g^{(1),(2)}/\alpha)$，与$g^{(1),(2)}$成正比。上行及下行S波的垂直波函数$\sigma^{(1),(2)}$有类似的表达形式，只要用S波速度$\beta$和$\beta_s$代替P波速度$\alpha$和$\alpha_s$即可。式(4a)已作了归一化，使得在均匀层中$g^{(1),(2)}$恰好为球Hankel函数。

2.4 Langer近似

方程式(2)解的一致的Langer近似给出

$$g^{(1),(2)}\sim\frac{2}{\omega r}\left(\frac{\pi\alpha_s}{\xi}\right)^{1/2}\zeta^{1/4}\mathrm{Ai}(-e^{\pm 2i\pi/3}\zeta) \tag{4b}$$

其中$\zeta=\left(\frac{3}{2}\omega\tau\right)^{2/3}$。[式(4b)也能像Richards(1976)那样用1/3阶

Hankel 函数写出]当 ζ 的值大时，Langer 近似式(4b)重又简化为WKBJ近似式(4a)。在实践中，当 $\omega\tau$ 等于5时，Langer 近似式(4b)与WKBJ式(4a)的差值在约1%的范围。为了确定 WKBJ 近似是否适合入射角和频率的某一特定范围，对射线参数 p 的特定区域估算一下 $\omega\tau$ 是有用的。

2.5 水平波函数

对于大的 ωp 及 Δ 不接近震源或对跖点情况，$Q_l^{(1),(2)}$ 由 Legendre方程解的WKBJ近似式正确给出。即

$$Q_l^{(1),(2)} \sim \frac{\exp\left[\mp i\left(\omega p \Delta_0 - \frac{1}{4}\pi\right)\right]}{2\pi\omega p \sin \Delta_0} \tag{5}$$

如果 ωp 是小值，或者 Δ_0 接近零值或是 π 的倍数时，最好不要将Legendre函数分成为行波分量 $P_l = Q_l^{(1)} + Q_l^{(2)}$。对跖点问题的 P_l 计算将在这章较后的一节中叙述。

2.6 广义反射-折射系数

在式(1)的被积函数中，$\grave{P}\acute{P}$ 函数是一个广义反射系数，或者是P波入射在单一边界上或者由速度一阶或二阶不连续而分成几层的区域上(图3)的反射率函数。对于在半径 $r=r_b$ 处的一个单一边界，$\grave{P}\acute{P}$ 能用求解一个在变换域 (ω, p) 上表示应力-位移矢量连续性的线性方程得到

$$(U, V, R, W)_{r_b^+} = (U, V, R, W)_{r_b^-} \tag{6a}$$

如果P波从上入射在 r_b^+ 边，则边界条件式(6a)能用广义反射、折射和转换系数加权的基本矩阵 $F_2(r_b^+)$ 和 $F_1(r_b^-)$ 写出：

$$F_2(r_b^+)\begin{pmatrix}\grave{P}\acute{P}\\ 1\\ \grave{P}\acute{S}\\ 0\end{pmatrix} = F_1(r_b^-)\begin{pmatrix}0\\ \grave{P}\grave{P}\\ 0\\ \grave{P}\grave{S}\end{pmatrix} \tag{6b}$$

其中

$$
\mathrm{F}(r)=r^{-1}\left(\frac{\mathrm{i}}{\rho}\right)^{1/2}
$$

$$
\times\begin{vmatrix}
\acute{\xi}\pi^{(1)} & -\grave{\xi}\pi^{(2)} & r^{-1}p\sigma^{(1)} & r^{-1}p\sigma^{(2)} \\
-\mathrm{i}r^{-1}p\pi^{(1)} & -\mathrm{i}r^{-1}p\pi^{(2)} & \mathrm{i}\acute{\eta}\sigma^{(1)} & -\mathrm{i}\grave{\eta}\sigma^{(2)} \\
-\mathrm{i}A\pi^{(1)} & -\mathrm{i}A\pi^{(2)} & \mathrm{i}B\acute{\eta}\sigma^{(1)} & -\mathrm{i}B\grave{\eta}\sigma^{(2)} \\
B\acute{\xi}\pi^{(1)} & -B\grave{\xi}\pi^{(2)} & A\sigma^{(1)} & A\sigma^{(2)}
\end{vmatrix} \tag{7}
$$

(Woodhouse, 1978; Cormier, 1980)。在定义基本矩阵式 (7) 中使用了A和B，它们是剪切模量μ、密度ρ和展平了的水平慢度p/r的函数，定义为

$$
A=2\frac{p^2}{r^2}\mu-\rho \tag{8a}
$$

$$
B=2\frac{p}{r}\mu \tag{8b}
$$

$\acute{\xi}$，$\grave{\xi}$，$\acute{\eta}$，$\grave{\eta}$分别为上行和下行P和S波的广义垂直慢度，由垂直波函数和它们的径向导数给出

$$
\acute{\xi}=\frac{\mathrm{d}\pi^{(1)}}{\mathrm{d}r}\bigg/(\mathrm{i}\omega\pi^{(1)}) \tag{9a}
$$

$$
\grave{\xi}=\frac{\mathrm{d}\pi^{(2)}}{\mathrm{d}r}\bigg/(-\mathrm{i}\omega\pi^{(2)}) \tag{9b}
$$

$$
\acute{\eta}=\frac{\mathrm{d}\sigma^{(1)}}{\mathrm{d}r}\bigg/(\mathrm{i}\omega\sigma^{(1)}) \tag{9c}
$$

$$
\grave{\eta}=\frac{\mathrm{d}\sigma^{(2)}}{\mathrm{d}r}\bigg/(-\mathrm{i}\omega\sigma^{(2)}) \tag{9d}
$$

F_1和F_2分别由边界两侧r_b^+和r_b^-上的解析速度剖面算出。

在垂向不均匀层中，F满足频率的一阶线性方程

$$
\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial r}=\omega\mathrm{AF} \tag{10}
$$

这里，对于P-SV问题的4×4矩阵A由Chapman(1973,1974)给出。

对于两个固体之间的单一边界的解式(6b)，$\grave{P}\acute{P}$为

$$\grave{P}\acute{P}=-\left\{\left[b\grave{\xi}_1-c\grave{\xi}_2)F+(a+d\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1)\frac{Gp^2}{r_1^2}\right]\Big/D\right\}\frac{\pi_2^{(2)}}{\pi_2^{(1)}} \quad (11)$$

其中

$$D=EF+\frac{GHp^2}{r_1^2}$$

$$E=b\grave{\xi}_1+c\acute{\xi}_2, \qquad F=b\grave{\eta}_1+c\acute{\eta}_2$$

$$G=a-d\grave{\xi}_1\acute{\eta}_2, \qquad H=a-d\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1$$

a，b，c和d定义为

$$a=A_2+A_1, \qquad b=-A_2+\frac{B_1p}{r}$$

$$c=-A_1+\frac{B_2p}{r}, \qquad d=\frac{(B_2-B_1)p}{r}$$

脚标2和1分别代表边界面上、下两侧的固体。

垂直慢度和波函数的 Langer 近似修正了在掠入时广义反射-折射系数的频率关系。与这个频率关系有关的一个重要现象是通

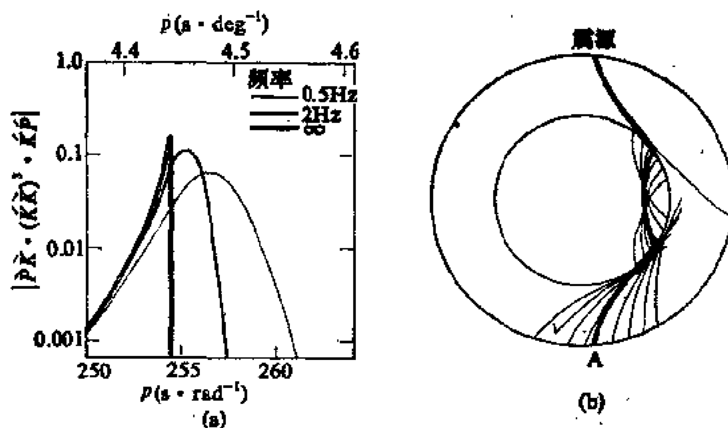


图2 (a)P4KP的反射和折射系数的乘积与两个频率射线参数的关系(Richards, 1973)，(b)最粗线是核 掠射。在转折点以下，能量有一指数衰减。因此，对于有限频率，能量能够从地幔中的转折射线漏到外核。这对射线参数大于掠入射，在有限频率情况，提供了如(a)中所示的非零能量

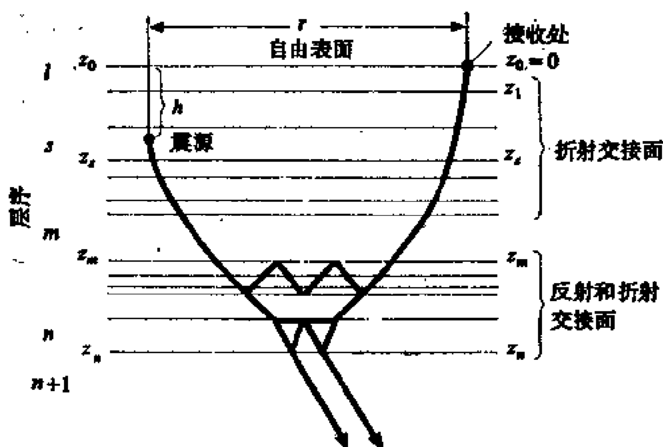


图3 用$\grave{P}\acute{P}$描述在z_m处向下入射P波的反射系数，因而$\grave{P}\acute{P}$既包括向上反射的（从z_m）P波，也包括在z_m和折射交接面之间层中的转折P波射线。在反射率计算中，$\grave{P}\acute{P}$代表这种波，以及在z_m和z_n之间一些层中，所有可能多次反射而最后返回z_m上面的层中的P波

道效应。在通道效应中，正好在边界面处转上或转下的有限频率的射线能与边界面相互作用。对于底部正好达到边界面上的射线，能够在边界下面激起折射实射线。这种折射或通道能量还起着降低射线参数接近掠入时的反射系数大小的作用。这些影响的例子示于图 2 。

2.7 WKBJ极限和总相位

注意，当 WKBJ 近似式(4a)被代入到式(1)中的被积函数及由式(11)给出的反射系数$\grave{P}\acute{P}$中时，会发生什么呢？这时广义垂直慢度变成为简单的余弦除以速度，即：对于行波$\acute{\xi}=\grave{\xi}=(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}=\lambda=(\cos i)/\alpha$，其中角$i$由$p=(r\sin i)/\alpha$确定。最重要的是出现在式(11)中的垂直波函数比$\pi_2^{(2)\prime}/\pi_2^{(1)\prime}$（在边界上计算）修正了垂直波函数积$\pi^{(1)}(r)\pi^{(1)}(r_s)$的相位。这个积在界面上侧介质中计算。垂直波函数$\pi^{(1),(2)}$或$\sigma^{(1),(2)}$的任何计算，都要假定是在

由解析速度剖面给定的光滑变化的介质中进行。给定速度的解析函数可以在复合半径上计算，这些复合半径对应着其底在垂直不均匀层的不连续区内、上侧或下侧的射线(图 4)。因此，对于足够低的射线参数，乘积$\pi^{(1)}(r)\pi^{(1)}(r_s)$可以用WKBJ 极限来说明相位复矢量 $\exp[i\omega(\int_{r_p}^{r}\lambda_2 dr+\int_{r_p}^{r_s}\lambda_2 dr)]$。这是一条在不连续面$r_b$以下，其底为半径$r_p$的射线。这个$r_p$的定义要求在介质2中速度函数$\alpha(r)$解析连续到$r_b$以下的半径值，即超过物理上所定义的层的范围。如果要计算出现在式(11)中比值$\pi_2^{(2)}/\pi_2^{(1)}$的WKBJ极限，则能看到出现相位矢量 $\exp[-2i\omega(\int_{r_p}^{r_b}\lambda_2 dr)]$。然而，这两个相位矢量的乘积，可简单地看作为在$r_b$界面上，向上反射在介质 2 中一平面 P波的相位，即 $\exp[i\omega(\int_{r_b}^{r_s}\lambda_2 dr+\int_{r_b}^{r}\lambda_2 dr)]$。虽然由乘积$\pi_2^{(1)}(r_s)\pi_2^{(1)}(r_b)$所给出的射线的底部可达到 r_b 以下，但广义反射系数的相位起着扣除在r_b以下的介质 2 速度剖面解析延拓中的转折射线相位的作用。

将WKBJ近似代入到式(1)中的所有垂直和水平波函数中，即

$$u_r(r,\ \Delta_0,\ \omega)=\frac{i\omega M_0(\omega)e^{-i\pi/4}\omega^{1/2}}{(2\pi\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi r r_s\alpha_s^2}\times\int_\Gamma B(p)e^{i\omega J(p)}dp \qquad (12)$$

其中

$$B(p)=p^{1/2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/4}\Big/\left(\frac{1}{\alpha_s^2}-\frac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/4}\grave{P}\acute{P}$$

在式(11)中的$\grave{P}\acute{P}$现在是不带比例项$\pi^{(2)}/\pi^{(1)}$的式(11)中广义系数的WKBJ极限。由比值 $\pi^{(2)}/\pi^{(1)}$给定的相位已经吸收在总相位因子$J(p)$中。对于界面反射的射线，$J(p)$用下式计算

$$J(p)=\int_{r_b}^{r_s}\frac{\cos i}{\alpha}dr+\int_{r_b}^{r}\frac{\cos i}{\alpha}dr+p\Delta_0 \qquad (13)$$

如果射线底部在界面以上，则平面波反射系数变为等于 1 ，而且在$J(p)$计算中，积分下限取定为上部介质转折点半径r_p。

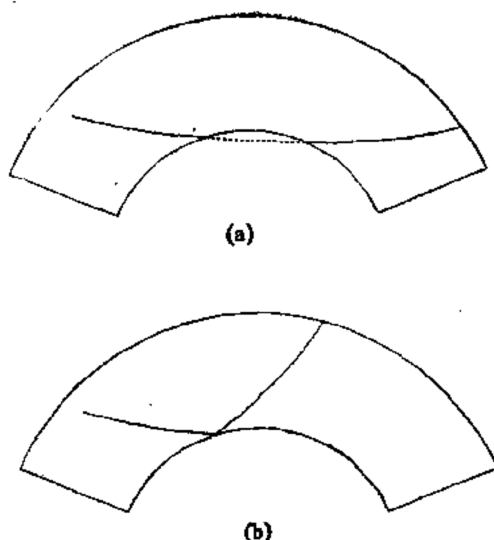


图4 出现在广义反射系数$\grave{P}\acute{P}$中的比值 $\pi_2^{(2)}/\pi_2^{(1)}$，在乘积$\grave{P}\acute{P}\times\pi_2^{(1)}(r_s)\pi_2^{(1)}(r)$中起着扣除射线相位的作用，这些射线在层2与层1分界面以下的层2中，以速度剖面解析连续形式转折。这样一条转折射线在(a)中用虚线描出。由乘积$\grave{P}\acute{P}\pi_2^{(1)}(r_s)\pi_2^{(1)}(r)$所给出的总相位描述了(b)中所示的反射射线

2.8 在提供的子程序中总相位的计算

2.8.1 引用Langer近似时的总相位

重要的是记住，下一节将要叙述的计算广义反射-折射-转换系数的子程序，给出了描述$\grave{P}\acute{P}$系数的$\pi^{(2)}/\pi^{(1)}$类型的垂直波函数的比值。这些比值起着扣除或者增加相位的作用，这个扣除或增加的相位对于把在界面上侧介质中转折射线的相位，转换成界面反射射线、通过界面的折射射线或者在界面处转变成其它类型射线的相位是必需的。本章的Fortran程序包中所提供的主程序SCHAIRY和子程序VALUES及TRAPEZ汇编了式(1)中给出的那类被积函数。当在数组ILNGVS中，借助指示码为2或3来给

出采用Langer近似选择确定反射-折射系数时，这类垂直波函数比$\pi^{(2)}/\pi^{(1)}$起着扣除或增加相位的作用。

2.8.2 不用Langer近似时的总相位

如果在数组ILNGVS中，设置指示码ILNGVS等于1或0，不引用Langer近似，则要引用平面波反射-折射系数，其中$\acute{\xi}$，$\grave{\xi}$，$\acute{\eta}$，$\grave{\eta}$是入射角余弦除以速度。由于这种选择，这类垂直波函数比$\pi^{(2)}/\pi^{(1)}$变为复常数$e^{\pm i\pi}$，$e^{\pm i\pi/4}$或1。

2.8.3 总相位的组合

不论ILNGVS选择哪一种情况，均由子程序VALUES调用子程序ROMTAU来组合总相位。总相位依赖于转折射线所要求的输入及引用Langer近似时出现在广义反射-折射系数中的垂直波函数的比值。由此程序包提供的PKP波实例输入说明了转折射线相位与由垂直波函数比值给定的相位之间有相互作用。在进行组合其他波型的被积函数之前，应当认真地弄懂这种输入。一个经验方法常常是使射线转到第一个引用Langer近似的不连续面以上。在相继的较低边界上，所要求的波型的全部垂直波函数应当是(i)由Langer近似计算，或者(ii)不需要计算广义反射-折射系数，因为它们有简单的极限1或者0。

2.8.4 何时应当用Langer近似？

对于某一波型，在一特定区域(ω，p)中是否有必要应用Langer近似，这取决于波在边界面处接近掠入射的程序。频率愈低，需要应用Langer近似的角度范围愈大。是否有必要引用Langer近似，可做一试验，即在边界r_b任一侧，用每一P波速度函数和S波速度函数计算量值$\omega\tau=\int_{r_p}^{r_b}(\cos i)/v\,dr$。如果$|\omega\tau|$小于5，则应用WKBJ近似会有较大误差。

3. 地震图的合成

3.1 主程序与子程序

式(1)是(a)能以离散频率计算，这种离散频率是在用快速Fourier 变换(频率法)将复波谱变换成时间域时所需要的；或(b)能在沿着实轴p积分后(慢度法)，写成为时间域上一系列积褶。本章子程序包所提供的WIGGLER程序是用快速 Fourier 变换完成变回到时间域的逆运算。由式(1)给出的一类复波谱表达式是由程序SCHAIRY装配起来的，而且沿着在复p平面上给定的路径Γ，用梯形法进行积分。

3.2 积分路径

程序提供S，ScS，SKS及PKP震相的实例积分路径，适用于不同震相的路径的讨论在Richards(1973)，Choy(1977)，Cormier和Richards(1977)等文章及Aki和Richards(1980)书的第九章中给出。更严格的路径推导在Nussenzweig(1965)和Richards(1973)的文章中给出。

3.2.1 鞍点

确定积分路径的第一步，如果可能的话，是计算相应于要合成的射线理论的稳相点或鞍点的射线参数值。只要沿实p轴段包含有或者充分接近于所有鞍点，则一条特定的路径常常能用于某一距离范围，而不需作修改。对于这些鞍点的精确计算一般是不必要的，这些值能从列在Jeffreys和Bullen(1958)走时表中的$dT/d\Delta$值中估算到。程序中假定的射线参数单位是秒/弧度。因而，将$dT/d\Delta$值由秒/角度变到秒/弧度时，要乘上$180/\pi$。鞍点也能用以选择重新产生几何射线理论结果的程序SCHAIRY的运行来计算。这种选择是企图找出稳相点，即在相函数$T(p)-\Delta(p)+$

$p\Delta_0$中求出极值(图5)。在这种情况中，必须给出沿着实轴包含所要鞍点的p的区域。

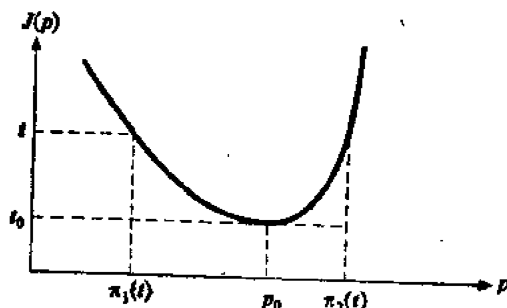


图5 对于一条简单的转折射线，总相位函数 $J(p)$在射线理论稳相点上达到最小值

3.2.2 衍射极点

第二个预备步骤是计算在积分路径附近的所有重要衍射极点的近似位置。这些极点将接近于P波或S波在一阶速度不连续面上、下两侧掠入射时的射线参数值。它们将由射线参数值$p=r_b/\alpha(r_b^+)$，$r_b/\alpha(r_b^-)$，$r_b/\beta(r_b^+)$和$r_b/\beta(r_b^-)$发出(图6和7)，这些值可由半径r_b及一阶速度不连续面两侧的P波和S波速度值算得。当波或将要合成的波有鞍点接近一个衍射极点时，要小心地将积分路径取成这样，使得在路径端部扩展到包括上半平面时(正虚部p)，要计入它的留数贡献。

3.2.3 鞍点的方向

第三步是计算鞍点的方向。这些方向通常相对于实p轴成±45°。一般说，具有正$d\Delta/dp$的震相，例如PcP，ScS和PKP-AB会有－45°方向的鞍点；而具有负$d\Delta/dp$的震相，例如简单的转折射线和直接折射波会有＋45°方向的鞍点。如果对鞍点方向性存有疑问，则可以用被积函数的总相位来确定，即将垂直波函数的WKBJ表达式(4a)代入到相应波型的积分表达式中，得到总相位。从而鞍点的方向能用使相位ϕ负虚部达到最大的通常方法

来得到，其中 ϕ 由复相位矢量 $\rho\exp[i\omega\phi(p)]$ 等于被积函数来确定。另一种方法是简单地描出一条试验性的复 p 路径的被积函数图形，同时检验被积函数是否当 $\mathrm{Im}(p)$ 增加时而指数地衰减。

3.2.4 实P轴外的路径长度

本章所提供的子程序不能自动地估算积分路径需要延伸到离实轴多远才能达到一个指数地变小的被积函数的区域。一般地说，频率愈低，路径需要延伸的离开实轴愈远。通常，必须进行路径试验和被积函数点描，以保证达到指数地衰减。分析由WKBJ近似给出的总相位，使有可能修改程序，用来计算为达到指数衰减所需要离开实轴的路径长度，或者计算由路径截止点到沿路径线性地延伸到复无限远点间的贡献（Thomson和Chapman，1986）。

3.2.5 实例：P＋PcP和P衍射

作为例子，图6和图7表示两个不同问题的积分路径。图 6 表明P＋PcP震相的路径及相当于掠入核幔界面距离上的 P 波衍射震相。在能够观测到分离的P和PcP震相的亮区距离上，积分路径分别以－45°方向和＋45°方向穿过鞍点，并且终止在指数衰减区里，该衰减区位于由对应地核掠射的射线参数发出的衍射极点线一侧。只要路径充分接近鞍点，不一定需要路径精确地穿过鞍点。实际上，这意思是鞍点的影响和指数衰减在被积函数图线中很容易观测到。图 6 所示的路径也适合于只能观测到衍射震相的阴影区的距离范围。当 $\mathrm{Im}(p)$ 在离开实轴路径部分增加时，被积函数很快衰减。这种衰减当频率增加时变得更快。当频率增加时，较高频率分量的幅度会意外地接近一个几乎是常数的小值，这个小值与机器精度有关。在这些小值处，不适宜于作衍射 P 波计算，因而简单地取复波谱幅度为零。

3.2.6 实例：PKiKP＋PKIKP＋PKIIKP＋…

图7表示在110°—135°距离范围上PKP－DF＋PKP－CD分枝的积分路径。沿这些路径的积分表示震相组合PKiKP＋PKIKP

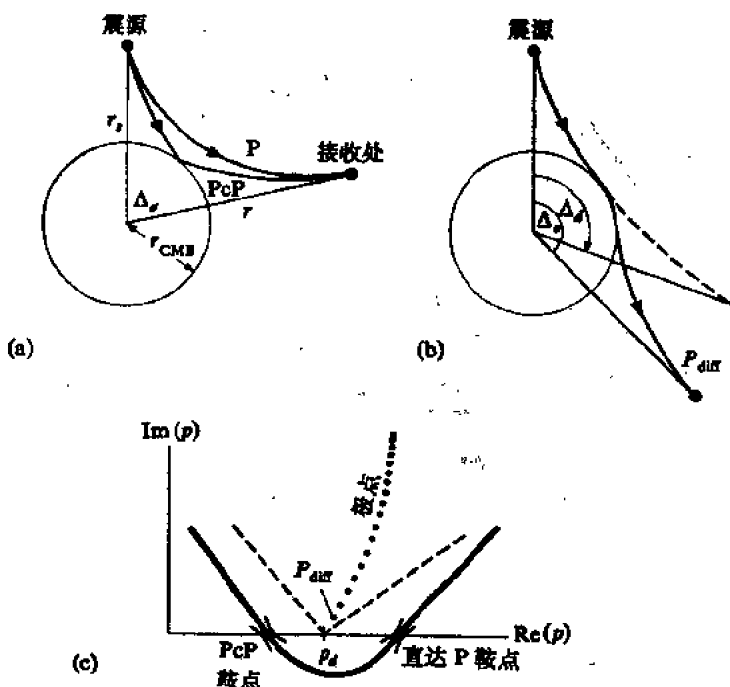


图6 (a)直达P波和PcP波射线；(b)Δ_d以外有一P波被衍射的阴影区；(c)极点方向、鞍点及P＋PcP波和衍射P波的积分路径。一条适合于阴影边界一侧的距离范围上的简单路径

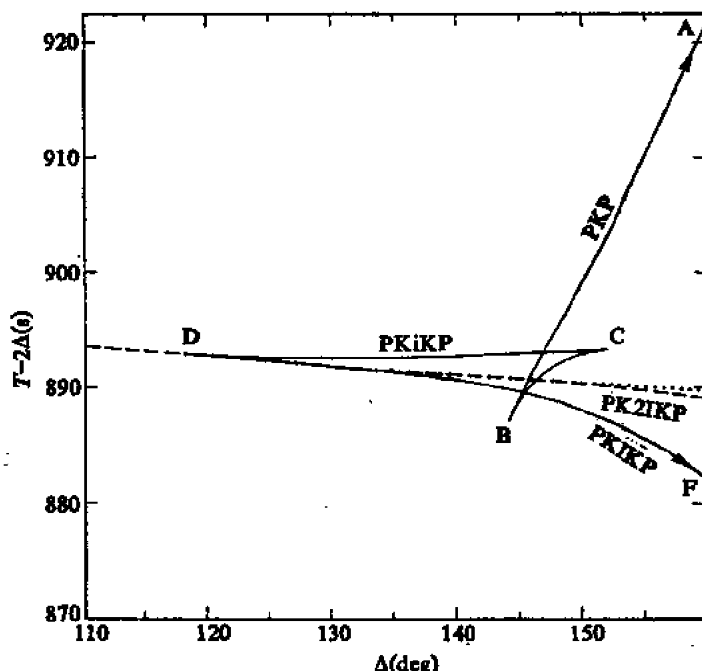
＋PKIIKP＋PKIIIKP＋…(Cormier和Richards，1977)。将复波谱变换到时间域之后，在此距离范围上的脉冲则十分简单。仅在约130°范围上的高频和宽频带记录中开始看到PKIKP(PKP－DF)从PKiKP(PKP－CD)中的分离。

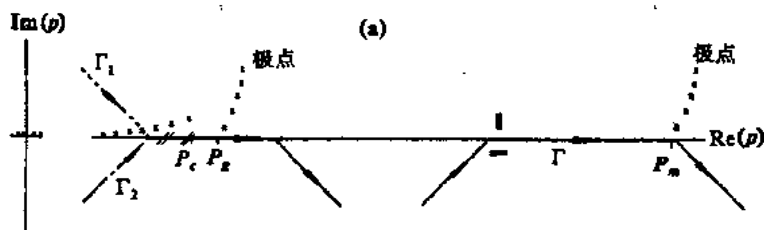
本实例中，被积函数包含有如下形式的广义反射/折射系数的乘积$\grave{P}\acute{K}\cdot\grave{K}(\check{I})\acute{K}\cdot\acute{K}\acute{P}$。$\grave{P}\grave{K}$和$\acute{K}\acute{P}$分别是通过外核-地幔界面的向下和向上的折射系数。系数$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$可展开为

$$\grave{K}(\check{I})\acute{K}=\grave{K}\acute{K}+\frac{\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}}{1-\acute{I}\grave{I}} \tag{14}$$

其中每一项是按式(6b)计算的广义反射-折射系数。这些项包含有广义垂直慢度$\acute{\xi}$，$\grave{\xi}$等和提供相位信息的垂直波函数$\pi^{(2)}/\pi^{(1)}$。

由式(14)能看到，系数$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$表示内核界面上侧反射的PKiKP波(系数$\grave{K}\acute{K}$)以及PKIKP(乘积$\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}$)和所有的下侧面反射PKIIKP＋PKIIIKP＋…，并包含有一个干涉首波[因子





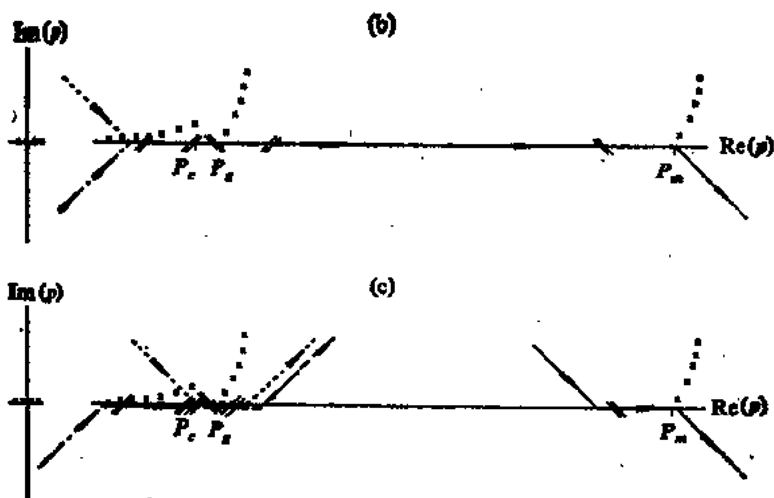


图7 PKP波的走时曲线和为计算合成地震图在复p平面上相应的积分路径。式(1)中有$\grave{K}\acute{K}$时，积分沿Γ_1进行。式(1)中有$(\acute{K}\grave{I}-\acute{I}\acute{K})/(1-\acute{I}\grave{I})$时，积分沿$\Gamma_2$进行。对于路径$\Gamma$的其余部分，两个被积函数合并成与$\grave{K}\grave{I}\acute{K}$成比例的一项。在$\grave{K}\check{I}\acute{K}$项中，与$\grave{\xi}_1$有关的极点(近似平行于$p$虚轴的极点)被与$\check{\xi}_1$有关的极点(近似平行于实$p$轴的极点)所替代。(a)—(c)表示路径的修正及鞍点的移动，(a)110°—135°距离范围，(b)135°—152°范围，(c)大于152°范围

$1/(1-\acute{I}\grave{I})$的展开]。对于具有不连续速度增加的任一界面上入射波有关的问题，都可找到类似的系数和射线展开式。实例包括S与K在外核下边界上的相互作用(图8，Choy，1977)、在莫霍界面下侧包括Pn震相的多次P波反射(Menke和Richards，1980)以及在莫霍界面下侧包括PL震相的S波转换成为多次P波(Frazer，1977)。这些展开式和路径由Ludwig(1970)在一篇电磁波与有一个相速度不连续增加的圆柱体相互作用的文章中首先提出的。

内核问题的积分路径(图7)是对展开式(14)中的不同项取各

自路径的应用说明。在效果上，一条路径可以像一根分离开的弦那样来处理，用各个分离部分代表复 p 平面不同区域中被积函数的不同部分。注意，被积函数的射线展开式中的各个项，在复 p 平面中可以有不同的奇异点。只要极点线不代表被取作为路径分裂部分的特定被积函数的极点，则允许一条路径的分裂部分通过一条极线，而仍是有效的。在图 7 中，对 $\grave{K}\acute{K}$ 项取定的那段，它通过一系列 Rayleigh 极点就会发生这种情况。这些Rayleigh 极点是 $\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}/(1-\acute{I}\grave{I})$ 项的极点，而不是 $\grave{K}\acute{K}$ 项的极点。

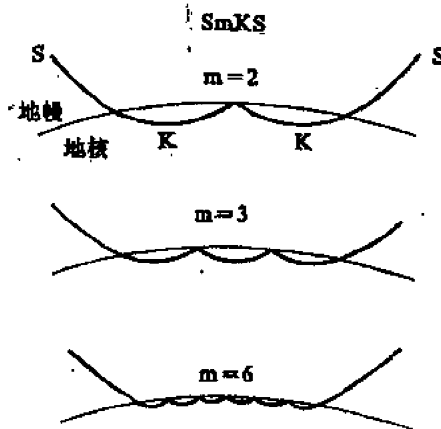
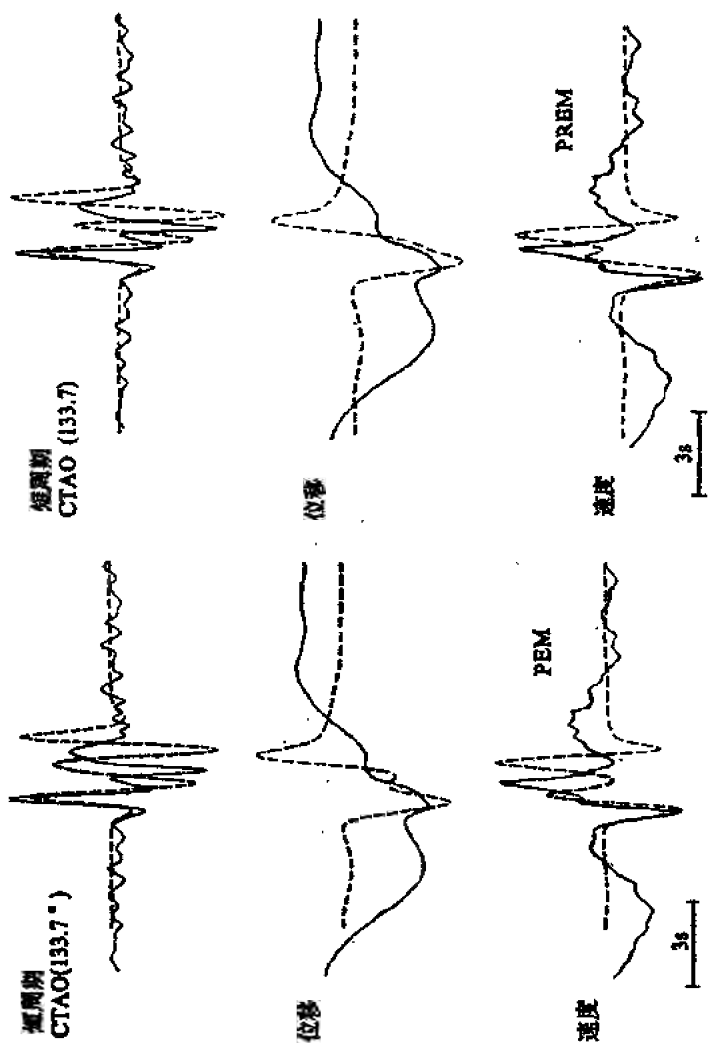


图8 干涉首波沿着具有较快速度的介质的内侧传播。较快速度介质的最上部起一个波导作用，类似于一条“低音廊”。干涉首波的例子包括与莫霍面下地幔中转折射线有关的Pn震相、内核界面下侧中的PKIKP+PKIIKP+PKIIIKP+…波及外核界面下侧中的SKS+SKKS+SKKKS+…波

未被展开的 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 系数，具有像广义反射系数 $\grave{K}\acute{K}$ 一样的代数形式，但要用一个新型垂直慢度 $\grave{\xi}_1$ 替代内核的垂直慢度 $\check{\xi}_1$，即

$$\grave{K}(\check{I})\acute{K}=\frac{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\grave{\xi}_2-\rho_2\check{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1\check{\xi}_1]\pi_2^{(2)}}{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\acute{\xi}_2+\rho_2\check{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1\check{\xi}_1]\pi_2^{(1)}} \tag{15}$$



(a)

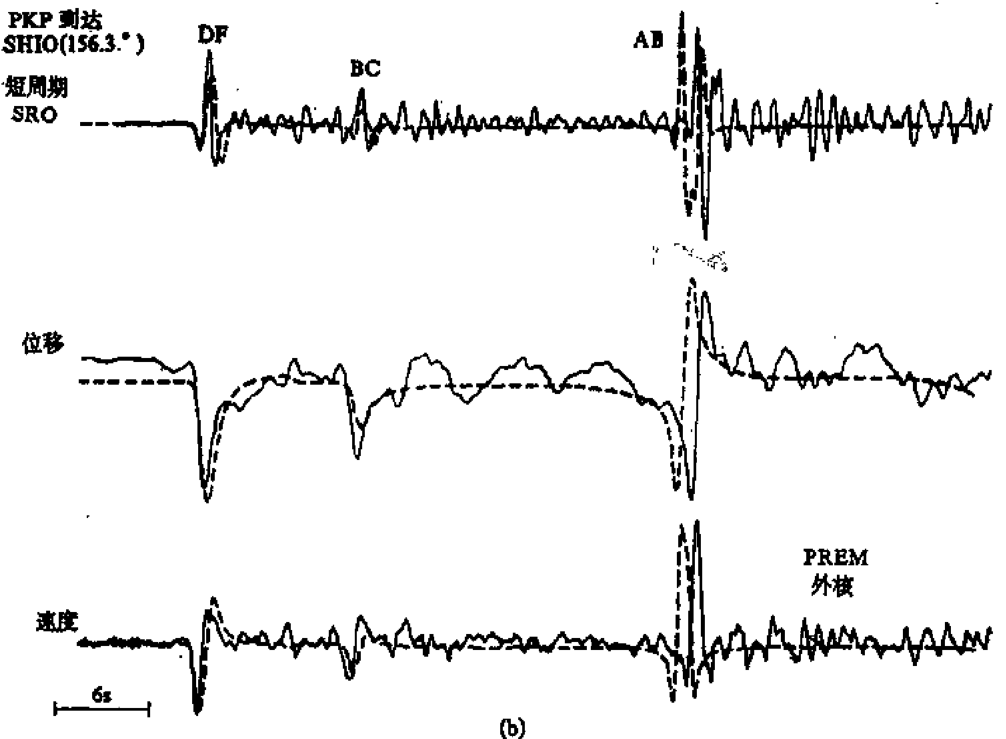


图9 (a)位于133.7°的GDSN的CTAO 台 记 录的深源地震的PKiKP+PKIKP+PKIIKP+…合成 地震图。表示了两种地球模型PEM和PREM(虚线)的结果，并且与CTAO台所观测到的波型（实 线）作了比较(Choy和Cormier，1983)。(b)位于156.3° 的GDSN的SHIO台观测到的一深源地震PKP 波形(实线)与合成地震图波形(虚线)(Choy和Cormier，1983)

其中

$$\check{\xi}=\frac{1}{-\mathrm{i}\omega(\pi^{(1)}+\pi^{(2)})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\pi^{(1)}+\pi^{(2)}) \tag{16}$$

波函数$\pi^{(3)}=\pi^{(1)}+\pi^{(2)}$表示内核转折P射线的相位。$\pi^{(3)}$和$\check{\xi}$的Langer近似，在本章所提供的程序中以选择ILNGVS＝3而引入，且代表如下计算

$$\pi^{(3)}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\omega^{1/6}\frac{\tau^{1/4}}{Q^{1/2}}\mathrm{Ai}(-\zeta) \tag{17}$$

在110°—156°的距离范围中，PKP震相的积分路径输入是由录人在本章的程序所提供。这种输入用来合成如图9所示的地震图，这些图由Choy和Cormier(1983)给出。

3.3 Filon积分的修正和慢度法

虽然程序包SCHAIRY 和 WIGGLER 是围绕一个具有简单梯形p积分的合成波谱法做成的，但是许多子程序也能用于慢度法，而且具有p积分的不同形式。例如，只要能把对频率近似线性相关的相位有贡献的全部因于隔离开，则Filon积分就能被替代地应用(Frazer和Gettrust，1984及本书第三篇第三章)。如果Langer近似用来计算系数$\grave{P}\acute{P}$，于是，能够写出

$$\grave{P}\acute{P}=R(\omega,p)\exp\left(-2\mathrm{i}\omega\int_{r_p}^{r_b}\frac{\cos i}{\alpha}\mathrm{d}r\right) \tag{18a}$$

其中

$$R(\omega,p)=\grave{P}\acute{P}\exp\left(2\mathrm{i}\omega\int_{r_p}^{r_b}\frac{\cos i}{\alpha}\mathrm{d}r\right) \tag{18b}$$

相位 $-2\mathrm{i}\omega\int_{r_p}^{r_b}(\cos i)/\alpha\,\mathrm{d}r$ 必须包括在用于Filon积分的总相位$J(p)$中。对于大的$\omega\tau$值，能够将WKBJ近似式(4a)代入出现在$\grave{P}\acute{P}$中的垂直波函数中。这些起着抵消出现在式(18b)中的相位矢量的作用，而得到函数$R(\omega,p)$，它与频率无关，而且简单地等于无相位平面波反射系数。对于小的$\omega\tau$值，Langer近似式(4b)必

定要用在$\grave{p}\acute{p}$中出现的垂直波函数中，这时$R(\omega,p)$变成与频率有关。在慢度法合成时，与频率有关的函数$R(\omega, p)$不是可用分析法(如果可能的话)，就是可用快速Fourier变换法将其变回到时间域中的一系列慢度。

3.4 地球模型的确定

地球模型以层界面上密度和P、S波速度是半径的三阶多项式系数的形式存贮在一个BLOCK DATA程序中。由本章提供的软件包中，BLOCK DATA包含模型PREM的各向同性形式的系数，参考频率为1Hz。给定一个复半径，子程序CALPHA和CBETA，就由这些多项式系数计算这些厚层中的速度。速度值一般是复数，且如果引入频散衰减选择(IAD=2)，则它也可以与频率有关。子程序CBETP和CALP分别计算复半径上速度α和β的径向导数。修改这些子程序，程序包就能很容易的被修改成适用于在半径上任意解析函数确定的速度。给出一个包含有半径多项式与指数乘积的速度剖面的实例。

Langer近似式和它的有关的WKBJ极限表示了有单个转折点的体波问题解。应当避免在要研究的p范围内包含有两个转折点的层。低速区应当用几个具有单一正梯度或者单一负梯度的不均匀层进行参数化，但不可作为连续层处理。与低速区域边界的相互作用，能用成层区的反射率响应或者用与组成广义反射-折射系数响应的部分射线展开来处理。当用多项式或其它解析函数对不均匀层参数化时，应用实际经验法则就不会在速度剖面上引起严重的打结或反挠。这些反挠会生成多个转折点，同时使转折点的寻求会聚在一个特定的复p的错误的转折点上。发生上述现象的情况通常是很容易察觉的。式(1)中被积函数图线或者在复p平面的不适当的区域里呈现出不应有的增长或衰减，或者有未曾预期的不连续性。这种计算震相的到时也会与由射线理论算得的到时有误差。这决不是用PREM速度多项式计算的许多实例所

具有的情况。

T7模型(Burdick和Helmberger，1978)是用半径的六阶多项式的速度参数化而算得的(Cormier和Choy，1981)。在盖下面的厚层中的速度剖面表现出在复 p 狭窄的范围中具有多个转折点的一些问题。这些转折点能用这样方法予以消去，即将这厚层在接近200km处的由强梯度变到弱梯度的过渡位置上分成为两层(图10)。若描出式(1)中被积函数，当通过不连续性与不适当的指数增长点时，上述发生的情况变得更明显。

T7模型上地幔三折线的计算是用类似于在PKP震相中所叙述的积分路径和被积函数来完成的，在那种情况中，类似于$\dot{K}(\dot{I})\dot{K}$的两个函数的乘积是用Langer选择ILNGVS＝3，在400km下方和

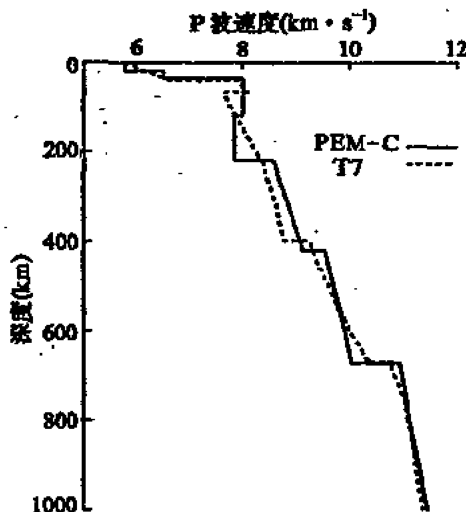


图10　PEM-C模型(Dziewonski等，1975)和T7模型(Burdick和Helmberger，1978)对各向同性、1Hz的上地幔的P波速度剖面比较图。T7在低速区盖的基部到400km深度，用一简单的多项式进行参数化

670km 不连续面上的垂直波函数来构成。这些被积函数表明与这些边界有关的双重三折线(图11和12)，像沿着界面下方的干涉首波一样。这些结果能很好地与那些由反射率法及Cagniard法（Burdick和 Orcutt，1979），在展平了的均匀成层的T7 模型（图13)计算所得的结果进行比较。一般说来，通常发现用由薄的均匀层模型计算所得的合成地震图，与用厚的垂向不均匀层模型计算结果进行比较，很相接近。若位移与仪器响应积褶以及(或者)与源脉冲积褶，该源脉冲长度大于薄成层表达式中内层倍数的时间间隔，则这是正确的(Choy等，1980)。

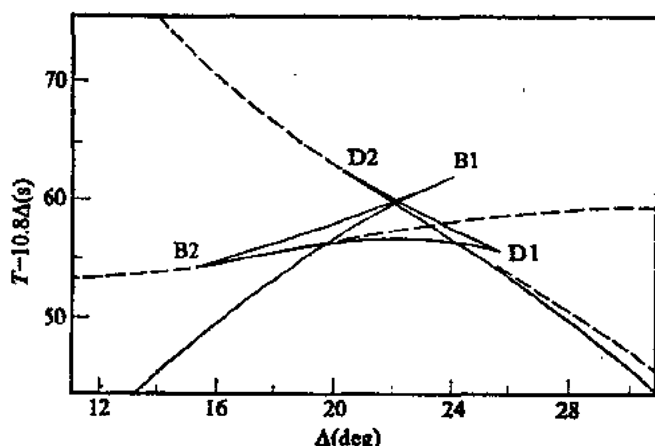


图11　以虚线表示的较弱振幅到时的 T7模型的折合走时曲线。没有给出与低速区盖部的相互作用

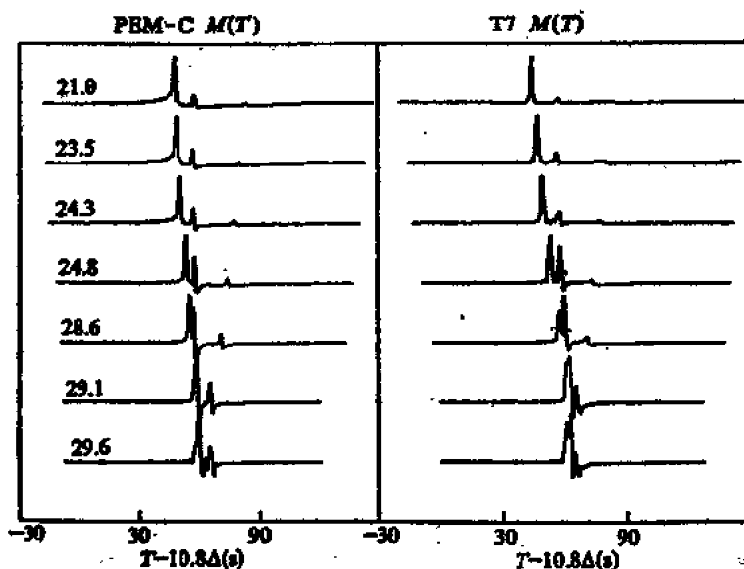


图12　一爆炸点源引起的P波，在大于20°距离上用模型PEM-C和T7所计算的位移响应。图线左边的数字是对应于由Burdick和Helmberger研究的资料记录的距离。注意，在29.6°处，PEM-C模型的强的二次脉冲，这是由于在670km深度，PEM-C有一较大的速度跳跃，尖端D1在PEM-C上延伸到较长的距离(Cormier和Choy，1981)

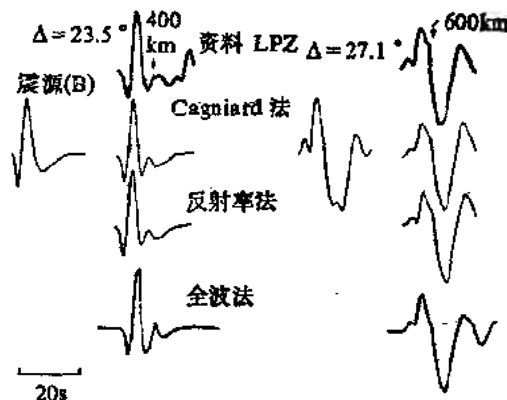


图13　用各种不同方法对T7模型计算所得的合成地震图，与用模型参数化法计算所得的结果进行比较。已经把源函数和 LP-WWSSN 仪器 响 应 进行了积褶(Burdick和Orcutt，1979及Cormier和Choy，1981)

3.5 转 折 点 计 算

为了计算在Langer近似式中和界面以上转折射线的相位因子结构中的延迟时间τ，需要转折点半径。用Newton-Raphson 方法(Acton，1970)求出转折点半径。在给定射线参数p时，对r_p取一个初始猜测值，再用迭代法求得在一定精度范围内的r_p，这种精度是与震相计算中所要求的精度有关。迭代包括如下计算

$$r_p^{new}=r_p^{old}-\frac{pv(r_p^{old})-r_p^{old}}{pv'(r_p^{old})-1} \tag{19}$$

其中v'代表由CALP或CBETP得到的速度的径向导数。沿着积分段开始，r_p最初定为层界面之一。对于在p被积函数所需要的一系列r_p，由旧的p计算得到的前一个r_p可以存贮起来，随后用作新p中的对r_p的第一个猜测值。这过程用修改存贮在标记为RTP公共块中的转折点数组来完成。转折点的这种修正使得算法对沿着积分路径Γ的每一个p仅一次或两次迭代就收敛。这种算

法使得引用几乎任何描述给定层内P波速度剖面的解析函数变得很简单。

3.6 延迟时间 τ

计算τ的方法很多。最一般的方法是用数值积分。子程序RAYLEG综合了Romberg积分法(Acton, 1970)和由Jeffreys和Jeffreys(1956)提出的三点求积公式计算$\tau=\int_{r_p}^{r_b}(\cos i)/v\,dr$。Romberg积分精度可由输入参数控制，但三点公式精度随着r和r_p间距离的增大而降低。由此，Romberg积分法用于转折点在100km范围内，而三点求积法用于路径的其余部分。在r_b和r_p之间，假定为复r形式的线性路径。对于在被积函数的一个极限处其行为像$x^{1/2}$或$x^{-1/2}$的函数，现已得出，三点公式用于计算频率高到4Hz合成地震图时有足够的精度。在100km处，从Romberg法变为三点求积法，可通过在子程序ROMTAU的公共说明中改变一个参数来实现。在Romberg积分中，用收敛性试验改变参数，能够获得较高的精度。

基于$v=ar^b$和$v=a+br^2$内插的τ的不同计算方法已由Frazer(1983)和Chapman(1978)提出。在本章所叙述的大深度范围上，当限定在极为复杂的模型中，用半径或者深度多项式参数化，能为式(1)中的被积函数正则性提供某些方便。特别是，参数化避免了由于速度二阶不连续而引起的广义反射-折射系数的不连续。不论何时在模型中出现二阶不连续，它的影响总能包含在计算广义反射-折射系数或者Doornbos(1981)所给出的反射率响应中。

另一种计算τ的方法，把展平了的深度坐标变成展平速度倒数多项式，即$\ln r$等于含有$[r/v(r)]$的多项式($\ln r=\mathrm{poly}[r/v(r)]$)，从而使各个厚层参数化。因而$\tau$的积分能用Červený和Jansky(1983)给出的公式分析计算。转折点半径不需知道，因为

积分变量从 r 改变到 r/v 使积分下限等于射线参数 p。以 $\ln r=a+b(r^2/v^2)$ 计算 τ 方法的子程序为TAUFST。

3.7 Langer近似的垂直慢度和波函数

子程序LANGER是用Abramowitz 和 Stegun(1964) 给出的公式计算 $\pi^{(1),(2)}$，$\sigma^{(1),(2)}$，$\acute{\eta}$，$\grave{\eta}$，$\acute{\xi}$ 和 $\grave{\xi}$。基本原理与许多计算特殊函数的子程序相同，它是采用适合大宗量 $\omega\tau$ 的渐近公式，与对于小的 $\omega\tau$ 值具有收敛很快的级数解互相修补。两个级数在某一 $\omega\tau$ 值上相互修补，而且不论对哪一个级数解仅仅要求少数几项在修补点上就有很高的精度。在此意义上发现 $\omega\tau=3.5$ 最合适。

LANGER 也得到广义慢度 $\acute{\eta}$，$\grave{\eta}$，$\acute{\xi}$ 和 $\grave{\xi}$。在调用程序计算广义垂直慢度时，用它们的 WKBJ 极限还是 Langer 近似要给出选择。如果选用WKBJ极限，则子程序VALUES使 $\acute{\eta}$，$\grave{\eta}$，$\acute{\xi}$ 和 $\grave{\xi}$ 的分枝切割与实射线参数轴成60°角。选择这些枝割来模仿Langer近似中 $\acute{\eta}$，$\grave{\eta}$，$\acute{\xi}$ 和 $\grave{\xi}$ 的高频特征，它们在复 p 平面上有零点，对小的 $\omega\tau$，以与实 p 轴成60°角排列(图 6 和图 7)。为了再产生这些WKBJ极限，对于上行和下行P波的广义垂直慢度 $\acute{\xi}$ 和 $\grave{\xi}$ 按如下公式计算

$$\acute{\xi}=e^{-i\pi/3}\left[\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{p}{r}\right)e^{i\pi/3}\right]^{1/2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{p}{r}\right)e^{i\pi/3}\right]^{1/2} \tag{20a}$$

$$\grave{\xi}=e^{i\pi/3}\left[\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{p}{r}\right)e^{-i\pi/3}\right]^{1/2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{p}{r}\right)e^{-i\pi/3}\right]^{1/2} \tag{20b}$$

垂直波函数 $\pi^{(1),(2)}$ 和 $\sigma^{(1),(2)}$，以有一次量级的幅度和一个指数的复常数形式得到，如

$$\pi^{(1)}(r)=\hat{C}e^{m} \tag{21}$$

当波函数连续地相乘和/或相除进行组合时，要控制 $\hat{C}$ 和 m 值，以免下溢和上溢。对应着在半径 r 以下转折行波的射线参数 p 区域上，m 设定为零，而 $\hat{C}$ 并合了相位 $\exp\left[i\omega\int_{r_p}^{r}(\cos i)/v\,dr\right]$。在相当于 r 以上转折的波的区域上，m 不等于零，$\pi^{(1),(2)}$ 能指数地增

大或减小。

4. 延伸和特殊应用

4.1 衰 减

由作用应力引起的应变时间延迟是所有内在衰减线性机制的特征，它由复模量$\hat{M}(\omega)$来表示，这个复模量构成Fourier变换域上的应力和应变的关系，即$\tilde{e}(\omega)=[1/\hat{M}(\omega)]\tilde{\sigma}(\omega)$。这样，复速度$\hat{v}(\omega)$定义为$\hat{v}(\omega)=[\hat{M}(\omega)/\rho]^{1/2}$。因而，简单地将所有公式引进复速度进行解析延拓就给出了衰减对体波波形的影响 (Kennett, 1975; Cormier和Richards, 1976)。

复速度的频散是应力-应变滞后现象的时间延迟的一种表示。高频部分比低频部分传播得快。复速度的实部和虚部之间的关系等效于Kramers-Krönig关系，这是最初从电磁波传播的复折射率中总结出来的关系。地球中复速度的频散常常取作为一个衰减模型的频散，其中Q在频率几十赫兹以上几乎是常值。Liu等(1976)给出这样一种固体的复模量公式，即在此固体中，Q在角频率$\omega=1/\tau_1$到$\omega=1/\tau_2$频带范围上几乎是常值。由此模量能构成复速度。在子程序CALPHA和CBETA中，当选择指示码IAD等于2时，这就是用于确定与频率有关的复速度的模量。如，$\hat{\alpha}$由下式计算

$$\hat{\alpha}(\omega)=\alpha_0(r)\frac{\left[1+\frac{2}{\pi}Q^{-1}(r)D(\omega)\right]^{1/2}}{\left[1+\frac{2}{\pi}Q^{-1}(r)D(2\pi)\right]^{1/2}} \tag{22}$$

其中

$$D(\omega)=\ln\left[\left(\omega i+\frac{1}{\tau_1}\right)\Big/\left(\omega i+\frac{1}{\tau_2}\right)\right] \tag{23}$$

这里$\alpha_0(r)$是参考频率为1Hz的实速度函数。在本章所给出的子程

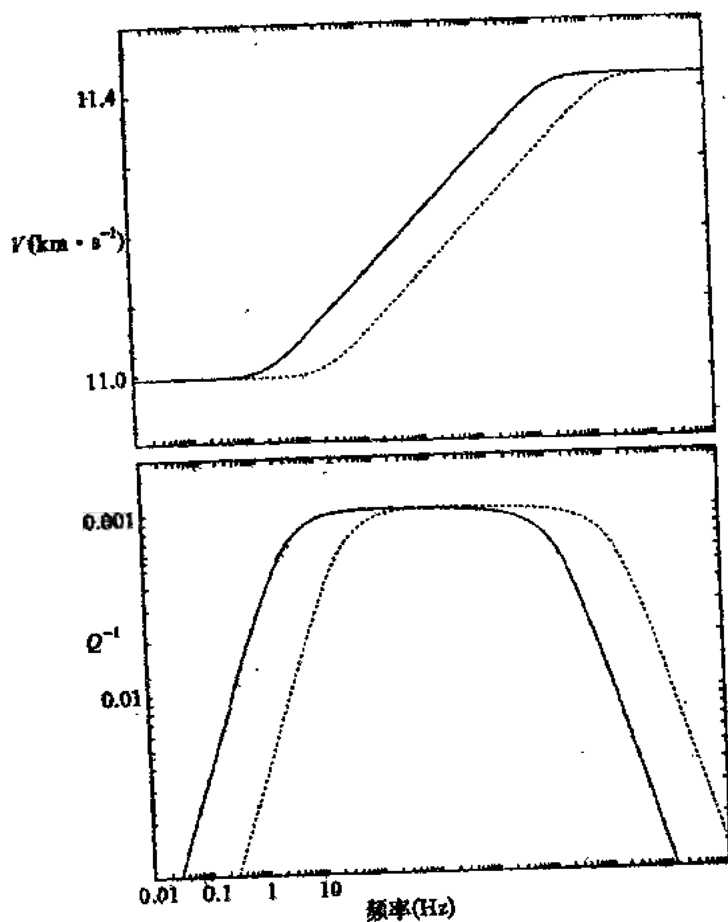


图14　地球内核两种可能的吸收带模型 Q_β(实线与虚线)的速度频散和衰减。这里的速度V是内核顶部P波的速度。该图是使用由这章所提供的程序中与频率有关的复速度子程序制备的

序中，$\alpha_0(r)$和$\beta_0(r)$，取自各向同性 PREM 模型在 1Hz 处的速度多项式。图14由以不相同的 τ_1 和 τ_2 值描出的CALPHA输出。$\mathrm{Re}[v(\omega)]$ 和 $Q^{-1}=\mathrm{Im}[\hat{M}(\omega)]/\mathrm{Re}[\hat{M}(\omega)]$ 作为频率的函数描出。

另一种衰减略去了频散，由选择 IAD=1 来达到。复速度由下式定义

$$\hat{\alpha}(r)=\alpha_0(r)\left[1-\frac{1}{2}iQ^{-1}(r)\right] \tag{24}$$

对于充分窄的通带计算，以及(或者)在不需要脉冲形状和上升时间的详细情况的应用中速度频散可以略去。$\alpha_0(r)$应选择为狭频带中心频率为参考频率的速度的实部。

由于像 τ 这样参数现在必须包括在某一频率循环中的大量计算，带有频散的频率相关速度的计算就非常花费时间。这种计算例子在 Lundquist 和 Cormier 文章中 (1980) 给出。在那篇文章中，τ_2 与地幔的温度和压力剖面相联系，以下式激活过程的速率表示：

$$\tau_2=\tau_0\exp[E^*+PV^*/RT] \tag{25}$$

其中E^*和V^*分别为要求从能穴中跳出的晶格缺陷 Avogadro 数运动的激活能与体积。τ和转折点 r_p 的计算方法包含在几乎是任意半径和频率相关的速度函数的CALPHA和CBETA中。然而，确定转折点算法要求计算复速度的径向导数。对于速度的复杂参数化，这些量在CALP和CBETP中用差分导数求得。

处理复频散速度的另一种方法已经由Choy和Cormier (1986) 给予说明。在这种方法中，对于有实速度的模型，首先用射线理论或者用射线参数积分的波谱法或慢度法合成地震图。随后，对给定的路径积分衰减$t^*=\int Q^{-1}/v\,ds$的频率关系中，计算最小的相位算子。这个问题等于由幅度响应来确定最小相位滤波器中的相位响应。接着，这个最小相位算子与非衰减模型中所算得的地震图进行积褶。

另外一些选择(如比例于频率幂次的 Q)能合并在提供较高指示码 IAD 值的一个编码中(IAD～＝～3)。所有修改都集中在复速度的子程序中。

4.2 横向各向同性

对有垂向对称轴和垂向变化的弹性常数A，C，F，L 和N的横向各向同性层的处理，可用对 τ 值和转折点的计算作简单的修改，并一起简单地代入反射-折射系数和基本矩阵元素的计算中来实现 (Cormier，1986)。在用 Newton-Raphson 迭代法求得转折点r_p之后，再用数值积分法计算延迟时间τ。τ由下式给定

$$\tau=\int_{r_p}^{r}\lambda \mathrm{d}r \tag{26}$$

对于SH波

$$\lambda=\left(\frac{N}{L}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{1}{v}+\frac{p}{r}\right)\left(\frac{1}{v}-\frac{p}{r}\right)\right]^{1/2} \tag{27a}$$

其中$v=(N/\rho)^{1/2}$。而对于P波和SV波

$$\lambda=s_3^{1/2}\left[\left(\frac{1}{v}+\frac{p}{r}\right)\left(\frac{1}{v}-\frac{p}{r}\right)\right]^{1/2} \tag{27b}$$

其中$v=[s_3/(s_1\pm R)]^{1/2}$。s_1，s_2，s_3和R是Love常数(1944)A,C,F，L和N以及密度的函数，它们由Woodhouse(1981)给定。$\pm R$相当于P波为$-R$，而 SV 波为$+R$。像在完全各向同性情况一样，用迭代法找出$pv-r$的零点来确定转折点，这里v是上面给定的特定速度之一。出现在垂向变化层基本矩阵中的垂直波函数 $\pi^{(1),(2)}$和$\sigma^{(1),(2)}$及广义垂直慢度ξ，$\hat{\xi}$，η和$\hat{\eta}$，都要用λ简单替代 $(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}$ 和$(1/\beta^2-p^2/r^2)^{1/2}$ 及修改过的τ函数代入的方法，进行对WKBJ和Langer形式的修改。

在式(9)中矩阵A的修改由Woodhouse给出(1978)，并由此，用求解每一本征值λ的本征矢量问题的办法来确定修改过的基本矩阵F。这个修改过的基本矩阵F由Doornbos等给出(1986)。反射/折射系数像在式(6b)那样，用这个修改过的基本矩阵确定。

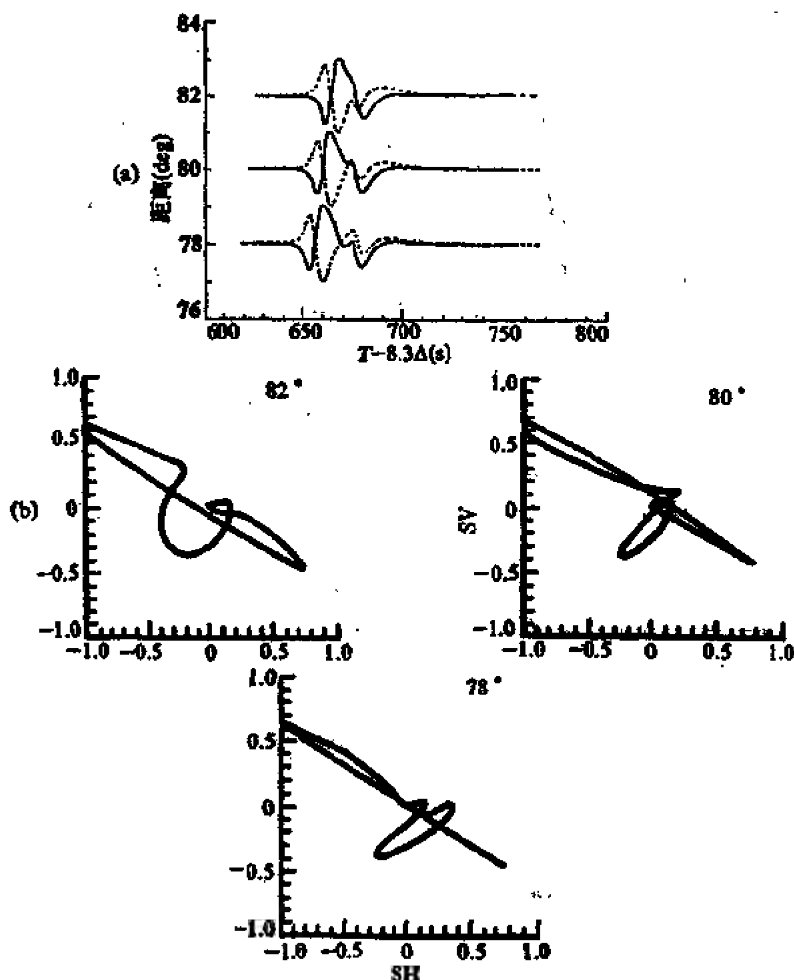


图15 (a)与地幔基底的一横向各向同性层相互作用的SH波(虚线)和SV波(实线)的合成地震图。震源辐射花样和接收器方位是这样选择的，使直达S波大致上包含有等量的SH波和SV波的能量。(b)示于(a)中的合成地震图的质点运动。质点运动的垂直转动是与ScS波有关，这倒转了SV波运动，而不是SH波的极性。当S波在较大距离上，越接近核-幔界面掠入时，横向各向同性层的影响越增加，ScS波在横向各向同性层中花费更长的时间(Cormier，1986)

这些修改，在与本章有关的、论横向各向同性一节的子程序中给出。还提供了Cormier文章(1986)中计算过的例子作为输入。这个例子是针对最低地幔中的一个横向各向同性层的。在这个例子中，S＋ScS横向分量和S＋SKS＋SKKS⋯＋ScS的径向分量的质点运动合成表示在图15中。

4.3 对跖点的合成地震图

在地球对跖点($\Delta=\pi$)或者在震源正顶上($\Delta=0$)，将水平波函数分成为由函数 $Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 所代表的相反方向传播的行波不再合适了。这种分解仅仅对乘积 $\omega p\Delta$ 和 $\omega p(\pi-\Delta)$ 大值时保持正则。当Δ接近震源点或者对跖点时，$Q^{(1)}$ 和 $Q^{(2)}$ 的渐近近似接近于一个对数奇点(Gilbert，1976)。

正确的方法不是将水平波函数分解成为代表在$+\Delta$和$-\Delta$方向上传播的波的函数。对在式(1)中的$Q^{(2)}$进行替代，替代掉$\Delta=0$邻域上的Legendre函数$P_l\cos\Delta$和在$\Delta=\pi$邻域上的$P_l\cos(\pi-\Delta)$。Szego(1934)给出过一个P_l的表达式，这个表达式一般对大的$|\omega p|$有效，且当Δ接近π的整倍数时，保持精确。这个表达式的前面两项适用于对跖点，由下式给定

$$P_l\cos\Delta'=\frac{\Delta'}{\sin\Delta'}\left[J_0(\omega p\Delta')+\left(\cos\Delta-\frac{1}{\Delta}\right)\frac{J_1(\omega p\Delta)}{8\omega p}\right] \tag{28}$$

其中$\Delta'=\pi-\Delta$。虽然式(28)是对高阶$l=\omega p-\frac{1}{2}$情况提出的，但由式(28)计算所得的P_l与对于小l时的P_l级数解相比较表明，式(28)对于小l也是一个很好的近似式。实际上，式(28)在乘积$\omega p\Delta$的所有范围上都保持有一个极好的近似。当无量纲乘积$\omega p\Delta$增加时，式(28)接近由WKBJ对$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$作近似求和所得的数值。Szego式(28)能补插在WKBJ近似中，当$\omega p\Delta=10$时，两者间的差异在1%之内。对于大值情况，$\omega p\Delta>10$，Legendre函数精确地由

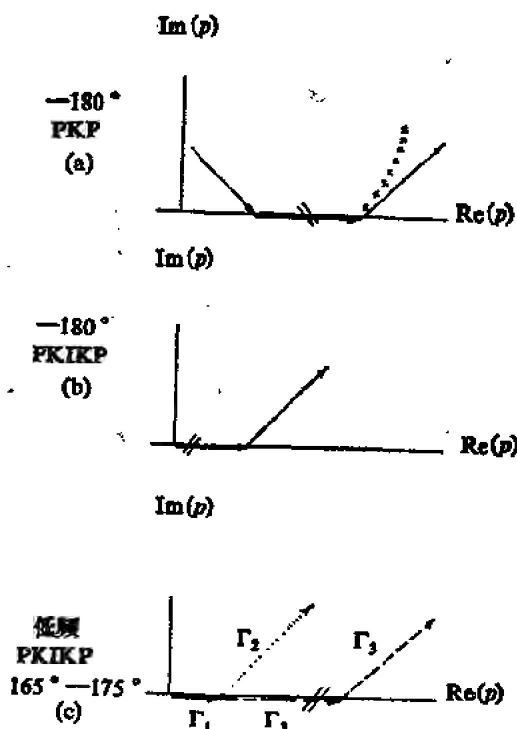
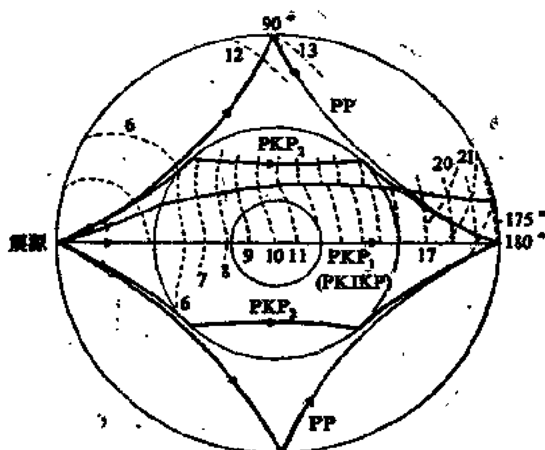


图16　对于PKP(a)和PKIKP(b, c)震相的对跖点合成在复p平面上的积分路径。Szego渐近展开式用于计算$\Delta=\pi$附近的$P_l(\pi-\Delta)$。对于在175°及低频时PKIKP震相(c)，当$\omega p(\pi-\Delta)$大于10时，将被积函数沿着$Q_l^{(1)}$和$Q_l^{(2)}$的单独路径分裂，这样做是方便的。沿着Γ_1，$\omega p(\pi-\Delta)$是小于10的，且将Legendre函数P_l取为被积函数中的水平波函数；沿Γ_2时，取$Q_l^{(2)}$；沿Γ_3时，取$Q_l^{(1)}$

下式给出

$$P_l=\left(\frac{2}{\omega p\sin\Delta'}\right)^{1/2}\cos\left(\omega p\Delta-\frac{1}{4}\pi\right) \tag{29}$$

补插点$\omega p\Delta=10$能用来确定复射线平面上将水平波函数分为行波分量$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$的点。例如，在Rial和Cormier文章中(1980)讨



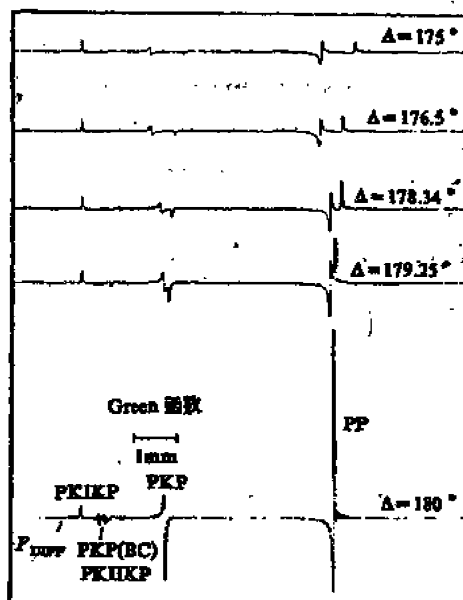


图17　在对跖点距离上，观测到的PKP和PP波的射线路径与位移响应。假定在表面有一点爆炸源作用（Rial和Cormier，1980）

论过的对跖点上PKIKP震相的合成中，在某些频带上，将水平波函数在近$\omega p\Delta=10$处分裂成行波分量，同时对每一个水平波函数取单独的p积分路径(图16)。在那篇研究文章中合成PKP震相的例子示于图17。本章中所提供的Legendre函数子程序SZEGO用于对跖点或震源问题。

4.4 垂向不均匀层的反射率

4.4.1 n层问题

不均匀层基本矩阵的解能用来确定单个界面或由几个不均匀层叠成的广义反射率和反射系数。方程式(6b)表示由单个界面反射的P波问题。用传播矩阵，将式(6b)的符号引伸到n层问题中，则是十分简单的。n层问题的所有特征都能用三层问题加以说明。考虑控制变量为$n-1$，n和$n+1$的一些层，控制变量随着深度增加而变大。假定下行P波在$n-1$层中入射在$n-1$和n层之间的界面上。在$n-1$和n层之间界面r_n上侧的应力-位移矢量与界面r_{n+1}下侧的应力-位移矢量有关，有

$$\mathsf{F}_{n-1}(r_n)\begin{pmatrix}\grave{P}\acute{P}\\1\\\grave{P}\acute{S}\\0\end{pmatrix}=\mathsf{P}(r_n,\ r_{n+1})\,\mathsf{F}_{n+1}\begin{pmatrix}b_1\\b_1\\b_2\\b_2\end{pmatrix}\qquad(30)$$

其中 $\mathsf{P}(r_n,\ r_{n+1})=\mathsf{F}_n(r_n)\mathsf{F}_n^{-1}(r_{n+1})$是传播矩阵。矢量$b^T=[b_1\ \ b_1\ \ b_2\ \ b_2]$的选择用来描述最下层的转折P波和S波。由$\mathsf{F}_{n+1}(r_{n+1})b^T$的乘积给定的垂向波函数$\pi^{(3)}=\pi^{(1)}+\pi^{(2)}$和$\sigma^{(3)}=\sigma^{(1)}+\sigma^{(2)}$，在对应着指向$r_{n+1}$以上射线的射线参数范围中指数地衰减。

将矢量b改变为$b^T=[0\ \ b_2\ \ 0\ \ b_1]$来表示在最下层中的下行波。这种选择相当于一般用在均匀界面计算中的边界条件。如果应用这种选择，则最低层取有任意的P波和S波速度。顶层选择足够低，使得由它全反射的P波和S波在要研究的时间窗外边(Harvey,

1981)。

转置式(30)左边或右边的矩阵，并且用Cramer规则来解线性方程，能够求得反射系数$\grave{P}\acute{P}$等。这种方法适宜于SH波和声波的2×2基本和传播矩阵情况，而对固体中P波和SV波却导致数值上的不稳定。这个问题出在企图消去指数地变大的一些项，即它们是代数相消，但却在一个有限字长的计算机中完成算术运算。这个问题也可用较原始的办法给予控制，即将模型在高频处分成较薄的层，但有两种不同的有效算法，即求解问题，并使算术运算次数减到最少。为了简要地给出这些算法的轮廓，最好将式(30)重新写成。

$$[b_1\ b_1\ b_2\ b_2]^T = S[\grave{P}\acute{P}\ 1\ \grave{P}\acute{S}\ 0]^T \tag{31}$$

其中 $S = F_{n+1}^{-1}(r_{n+1})P(r_{n+1},\ r_n)F_{n-1}(r_n)$

4.4.2 Kennett算法

由Kennett提出的(1974)，在第三篇第一章中叙述的算法是将基本矩阵以与层边界有关的乘积形式分组，即

$$S = Q_{n+1}Q_n \tag{32}$$

其中

$$Q_{n+1} = F_{n+1}^{-1}(r_{n+1})F_n(r_{n+1})$$

$$Q_n = F_n^{-1}(r_n)F_{n-1}(r_n)$$

由有关通过单一界面的应力-位移矢量的方程式(6b)可知，矩阵Q的元素将由与单一界面有关的广义反射-折射系数的简单乘积组成。这些系数将包含以比值$\pi_{n+1}^{(1)}/\pi_n^{(2)}$形式给出的相位信息因子。矩阵Q的乘积能作为包含层间回响的渐进的射线展开来构成。Q乘积的元素和如何构成回响系列的详细讨论由Kennett给出(1974，1983和第三篇第一章)。只要小心计入包含有垂直波函数比的相位信息，本章中所包含的子程序COEFF就能够用于构成以这些方法计算的反射率函数。调用计算垂直波函数$\pi^{(1)}$等的LANGER子程序，可获得这种相位信息。

4.4.3 Abo-Zena算法

另一个消去与 P-SV 反射率有关的数值问题的算法，是传播一个由五个独立量构成的反对称矩阵。Abo-Zena(1979)和Harvey(1981)给出了这种与Kind的δ-矩阵法密切相关的算法的推导。对垂直不均匀层的应用，在Cormier(1980)和Doornbos(1981)文章中都有叙述。在这计算结构中，反射率函数$\grave{P}\acute{P}$能写成为

$$\grave{P}\acute{P}=\frac{[0\ 1\ 0\ 0]\mathbf{F}_{n-1}^{T}\mathbf{P}(r_{n+1},r_n)^{T}\mathbf{Y}\mathbf{P}(r_{n+1},r_n)\mathbf{F}_{n-1}[0\ 0\ 1\ 0]^{T}}{-[1\ 0\ 0\ 0]\mathbf{F}_{n-1}^{T}\mathbf{P}(r_{n+1},r_n)^{T}\mathbf{Y}\mathbf{P}(r_{n+1},r_n)\mathbf{F}_{n-1}[0\ 0\ 1\ 0]^{T}} \tag{33}$$

Y是反对称矩阵，

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ -d_1 & 0 & d_4 & -d_2 \\ -d_2 & -d_4 & 0 & d_5 \\ -d_3 & d_2 & -d_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_1=-(A^2+B^2\check{\xi}\check{\eta}),\qquad d_2=r^{-1}pA+B\check{\xi}\check{\eta}$$

$$d_3=i\rho\check{\eta},\qquad d_4=-i\rho\check{\xi},\qquad d_5=\check{\xi}\check{\eta}+r^{-2}p^{-2}$$

本章中，提供了根据式(33)计算的P-SV波反射率子程序。

虽然Kennett和Abo-Zena算法是等同有效，且数值稳定，但Kennett算法更流行一些。这是因为它提供了在合成计算中控制内层乘子数的机会。不论何时，当下一个乘子幅度是非常小时，或者射线到达要研究的时间窗外面时，射线展开都能很容易地被截断。在包含有全部乘子的算法中，如式(33)，为了控制迟到的回响，这些回响反馈进由频率点数和频率取样间隔给定的有限时间窗内，要求在变回到时间域的过程中进行特殊的修正。基本修正是，在将复波谱变换成时间域时，对频率引进一个小的复部，它起着衰减迟到能量的作用(Rosenbaum, 1974)。

5. 结　论

本章已讨论了由少数速度函数给定的径向对称模型中的体波合成。这些速度函数在模型的各个厚的区域里对半径是解析的。速度函数的解析性提供了一个直接将模型与状态变量温度、压力等有关性质连系起来进行工作的机会。

在垂直变化层中，P 波和S 波波动方程的径向分离部分，用Langer或WKBJ近似求解，Langer近似法用于掠入射问题，正确地计算了隧道效应和频率相关的反射和折射。这些厚层和Langer近似的计算费用不会超过，而且通常是少于分成为薄的均匀层的展平模型中反射率计算的费用。

WKBJ 和 Langer 近似要求不均匀层中在所讨论的慢度范围上，有一个简单的转折点。存在低速区及梯度快变化的复杂速度剖面，也可用这样的方法来处理，将剖面分成若干层，每层内速度随深度单调地增加或减少。因面能计算反射率响应来说明体波与完全速度剖面的相互作用。每一层中的梯度也假定为足够平缓，这样可有效地假定P波和S 波的位势方程是解耦的，位势解耦在Richards文章(1974)中讨论过。那篇文章给出了频率和密度及弹性模量一阶和二阶的径向导数的一些不等式，它们必须要满足，以保证位势近似分离。如果这些不等式在某一层在讨论的频带上不被满足，则应当将那一层分成为若干更薄的层，并用反射率计算完成之。

固有衰减能包括在合成法中，只要将速度变为复数就可以了。垂直波函数和基本矩阵也能很容易地推广到有垂直对称轴的横向各向同性层中。

所提出的合成法是波谱类型的，在这类方法中，复波谱是在射线参数或水平慢度上进行积分计算，随后用快速Fourier变换变回到时间域。提供了作复射线参数路径上的梯形积分计算的一个

子程序，同时也提供一些子程序将Fourier变换变回到时间域。

梯形积分法最好用于沿实 p 轴的短短一段进行，这样，被积函数不会太振荡。一旦沿 p 轴有鞍点或稳相域，则路径可被变形，而离开实 p 轴进入被积函数指数衰减的区域。积分路径变形到指数衰减区域，保证假震相不引入慢度中，即在这种情况中终止数值 p 积分。当 p 积分限定在实轴上时，这些截断震相一般是存在的。Thomson和 Chapman(1986) 对截断震相用合成慢度法给出一些近似修正。类似的修正也能在波谱法中找到。

要注意，在所有子程序中，要考虑积分路径变形，离开实轴而不引入与物理衍射波有关的响应函数极点产生的那些奇异性以外的任何奇点。如果对被积函数的部分射线展开中的不同项取不同路径，则积分路径会变成非常复杂。用梯形积分子程序必须要谨慎地试验积分路径。应当做核对，看沿着实 p 轴被积函数取样是否合适，以及离开实 p 轴的区域中被积函数是否达到指数衰减。如果有需要的话，p积分能很容易地被修改，使之留在实轴p上。在这种情况下，截断修正能被用在实轴上，或实轴外，并且(或者)不同的求积法能用在p路径上。从其他章节所提供的子程序中能得到这些修改的某些部分。

第二章 WKBJ地震图算法

C.H.Chapman，朱仁益[1]，D.G.Lyness

（剑桥大学地球科学系Bullard实验室）

1. 引 言

在许多情况下，地震波能用几何射线理论描述。大多数地震体波传播时的频散和畸变很小，且非几何影响仅在有限的区域上是重要的。然而，非几何影响，按它们的真实性质而言，地球明显的不均匀性引起的非几何信号，才有意义。本章叙述几何射线理论最简单的延伸，所谓"WKBJ地震图"。它对于模拟某些非几何信号是很有用的。在高频处，对于直达和转折射线以及在交接面上的部分或全反射和折射，WKBJ地震图都与几何射线理论一致。在有限频率段临界点上，对于平面交接面上的首波和在那些幅度函数不连续或快速变化的区域上，例如，震源辐射花样的节点上，它保持有效。它还描述Airy焦散处及其附近和其它某些区域中的信号，这些区域是几何扩散函数快速变化或者异常大和异常小的区域。在由交接面引起的阴影区，它描述了阴影区的Fresnel部分，即不连续的波前，但不描述波场与交接面、边缘或点衍射处的与频率有关的互相作用，也不描述高梯度区域的波的耦合。方法的最大优点是：异常条件没有当作特殊情况处理，且能共同存在和重叠。事实上，例如，用户不需要知道小的三折线

1） 北京大学地球物理系。

和焦散存在(时间间隔项比数字化间隔小)，且仍能得到精确的地震图。

这种方法之所以称为“WKBJ地震图”算法，是因为对水平波场和垂直波场它都应用WKBJ渐近近似式(Chapman，1978)。将解限制在行进 WKBJ 近似，且略去瞬息 WKBJ 项，不作进一步的近似，同时正确地计算反变换。这种方法的理论发展已在其他地方(Chapman和Orcutt，1985a)仔细地评述过，在下一节，我们仅简要地概述这理论的结果。所有理论方法的参考文章可在Chapman和Orcutt(1985a)文章中找到，这里将不重述。

假定零阶WKBJ近似有效时，只要用平面成层模型中的同样算法，地球展平变换就能被用来得出球对称模型中的结果。再假定在源、接收处及交接面处的零阶WKBJ近似及在层中为零阶的Langer近似，则完全垂直波函数能够用射线展开式写出。只包含实的、非瞬息的射线，每一项都能正确地被解出。在WKBJ地震图算法中，水平慢度和频率变换有效地相消，没有必要进行变换积分。理论评述之后，本章其他各节将叙述用来计算水平成层介质中 WKBJ 地震图的五个子程序：PXINT，COMPON，COEFF，THETAC和CCSQRT。这些子程序一起形成WKBJ程序的基本内容——其他要求是模型、走时曲线和地震图的 I/O (输入/输出)。

子程序PXINT计算水平成层介质中的射线积分。COMPON提供震源辐射花样和接收处分量。COEFF 计算在平面交接面处平面波的反射和折射系数。这三个子程序是平面成层介质中几何射线理论的标准工具。为了完整性，它们都被包括在内，但它们也能很容易地被另外程序所替代。特别，WKBJ地震图算法能用Maslov渐近理论(Chapman和Drummond，1982)引伸到侧向不均匀的介质中。因而，二维或三维射线追踪的结果必须替代子程序PXINT的输出，但进行慢度和频率逆变换的关键子程序THETAC和CCSQRT保持不变。射线追踪算法在本书其他部分

叙述，且能与子程序THETAC和CCSQRT结合用来执行 Maslov 渐近理论。

导致WKBJ算法有效性的基本特征是对慢度和频率变换积分的解析计算。这与相位是频率的线性函数和幅度与频率无关的事实有关。但不幸，对于滞弹性介质，失去了这些特征。但在许多情况下，衰减变化得很慢，因而它的影响能从变换积分中因子分解出来，且可单独处理。在附录中叙述了能用来进行这种近似的修正。

2. WKBJ地震图理论

WKBJ地震图方法由Chapman(1976，1978) 及 Dey-Sarkar和Chapman(1978)引进，且由Chapman和Orcutt(1985a)给予广泛地评述。我们这里概要地给出结果。

我们考虑一个平面成层、完全弹性、各向同性介质。点源设在圆柱坐标系的垂直轴上。为了简化符号，我们转动坐标系，使得接收器安放在零方位角 ($\phi=0$) 上。这种坐标变换被应用到震源和接收处分量上，且水平辐射花样(与ϕ有关) 通过这种变换引入。方位变量ϕ不显式地进入下列结果中，但隐含地包含在震源和接收处分量中。为了简单起见，我们只考虑在传播平面上($\phi=0$)的震源和接收处分量，即P-SV波 (图 1)。相比较下，横向分量 SH 波是不甚重要的，同时也不将它计入在本章或程序中。

接着将位移、力和应力矢量展开成矢量圆柱坐标调和函数(Takeuchi和Saito，1972)的标准方法，我们得到一个有独立变量z，正的向上垂直坐标的常微分方程系。非独立变量是位移和应力的调和系数，这些系数甚至于在交接面上也是深度的连续函数。微分方程系是以适当的边界和震源条件，来求解得到接收处的调和系数。然后计算频率和水平慢度的逆变换来得到接收处的位移。如果我们用Bessel函数渐近展开式中的第一项 (远场近似)

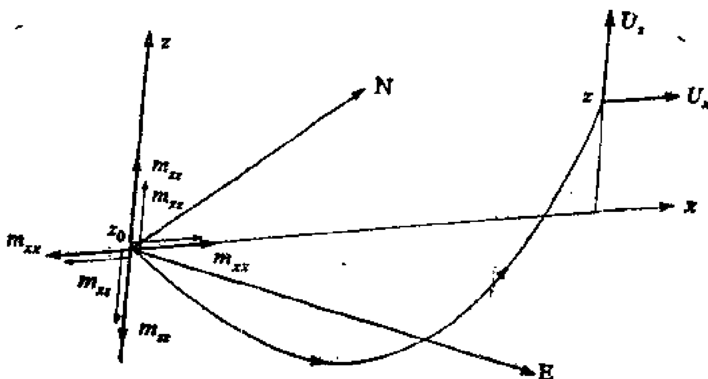


图1　圆柱坐标系及震源和接收处分量。注意，z 轴是垂直向上，且接收器安放在(x, z)平面上

来近似Bessel函数，则得到

$$u(t,\ x,\ z)\simeq-\frac{1}{2^{5/2}|x|^{1/2}\pi^3}\int_B\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{|\omega|}\right)^{1/2}$$

$$\times\exp\left[i\omega(px-t)+i\operatorname{sgn}(\omega)\frac{\pi}{4}\right]p^{1/2}$$

$$\times R(\omega,\ p,\ z)\mathrm{d}p\mathrm{d}\omega \tag{1}$$

其中$R(\omega,\ p,\ z)$是由微分方程系的解得到。只要零阶 WKBJ 近似(Richards, 1971)在每一个交接面上和震源及接收处有效以及零阶Langer近似(Chapman, 1974)在每一层中有效，则传播矩阵(Gilbert和Backus, 1966)就能被展开成代表射线的各项(Kennett, 1974)。$R(\omega,\ p,\ z)$能写成为

$$R(\omega,\ p,\ z)=\sum_{\text{rays}}[-\omega^2\hat{m}(\omega):M_{\text{ray}}(p)-i\omega\hat{f}(\omega)$$

$$\times F_{\text{ray}}(p)]U_{\text{ray}}(p,\ z)R_{\text{ray}}(p)e^{i\omega\tau_{\text{ray}}(p)} \tag{2}$$

这里求和是对所有可能的射线进行。但没有直接的方法来逐一算出在一多层模型中所有可能的 P-SV 射线，这样，我们已经用“rays”简单地表明求和，且用脚标“ray”表明一条特定的射线。在

实际中，用户必须用各自射线段和反射/折射系数（见下面）来给定每一条射线，而且仅有几条射线被计入。

在进一步处理之前，考虑如何给定模型和射线是有用的。为了简化子程序编写，引进了各种限制。首先，模型已被给定（图2）。

Ⅰ．模型点d_i。P、S波速度及密度模型是分段连续函数，分别表示为$\alpha(z)$，$\beta(z)$和$\rho(z)$。模型在离散深度d_i上是这样给定的，即$\alpha_i=\alpha(-d_i)$等及$d_{i+1}\geqslant d_i$，其中$i=1$，…，I。有几种方法能用来内插模型点之间的速度（见下面）。

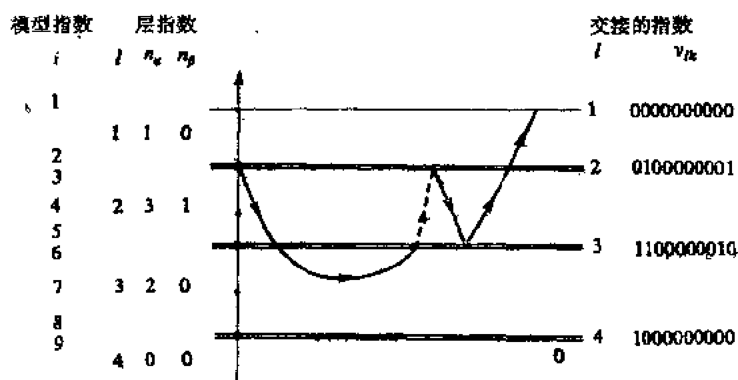


图2 一个实例模型和射线定义。实线是P射线，虚线是SV射线。$I=8$和$L=4$

Ⅱ．交接面z_l。交接面（一阶不连续）由两个相等的深度$d_i=d_{i-1}=-z_l$给定，譬如说$l=1$，…，L及$z_{l+1}<z_l$。注意，模型点d_i控制变量和交接面z_l的控制变量间没有固定的关系。为了表示相当于一个交接面控制变量的模型点，我们写出$i(l)$。

Ⅲ．自由表面z_1。按通常规则，第一个模型点是自由表面，$z_1=-d_1$及$i(1)=1$。

Ⅳ．层。交接面将模型分成层状。通常规则，第l层是限在第l个交接面以上及第$(l+1)$个交接面以下，即$z_l\geqslant z\geqslant z_{l+1}$。一

层可以包含有两个或多个模型点。模型包含有$L-1$个层。

V. 模型底z_L。按通常规则，模型应当包括它基底上的虚拟交接面，即$d_{I-1}=d_I=-z_L$，$\alpha_{I+1}=\alpha_I$等。这允许在第（$L-1$）层中有转折射线。

Ⅵ. 震源和接收处坐标z_0和z。按通常规则，震源和接收器必须放在交接面上。一般，必须在震源处引进一个虚拟交接面，接收器将放在自由表面上。

射线由一系列的射线段和系数(图2)给定。在本章中使用的术语"ray"就是代表这种系列。射线存在于一定角度范围里(或者水平慢度)，以确定对不同接收范围x的不同路径。因而，射线由如下确定。

A. 射线段$n_{\alpha l}$和$n_{\beta l}$。在第l层中，存在有总数为$n_{\alpha l}$的P射线段和总数为$n_{\beta l}$的S射线段，每一射线段是一通过两交接面之间一层，或一个交接面与一个转折点之间的射线路径。

B. 系数ν_{lk}。在第l个交接面处，存在有出现总数为ν_{lk}的第k个类型系数。如下习惯用于反射/折射系数：

$k=$		
1	为	R_D^{PP}
2		T_D^{PP}和T_U^{PP}
3		R_U^{PP}
4		R_D^{VV}
5		T_D^{VV}和T_U^{VV}
6		R_U^{VV}
7		R_D^{PV}和R_D^{VP}
8		T_D^{PV}和T_U^{VP}
9		T_U^{PV}和T_D^{VP}
10		R_U^{PV}和R_U^{VP}

(图3)(符号同Chapman和Orcutt，1985a)。注意，为降低类型数，已经应用了系数的对称性。在射线路径上，系数的次序是不重要的。所有$n_{\alpha l}$，$n_{\beta l}$和ν_{lk}值不全是可能的——它们必须相容，

且描述一系列实的射线段，它以一连续形式连接震源和接收处交接面。用户必须给定数$n_{\alpha l}$，$n_{\beta l}$和ν_{lk}，且所提供的程序并不检验这些数的有效性。

C．转折点。转折射线(图2)被给定得好像从层底反射的。不管射线是反射射线，还是转折射线，都与水平慢度值p有关，这个p不是射线定义的类别。因而，一条在第l层的转折P射线提供$n_{\alpha l}=2$和$\nu_{l+11}=1$，而一条转折SV射线则有$n_{\beta l}=2$和$\nu_{l+14}=1$。

必须给定模型控制变量、震源和接收处射线段的类型及方向(COMPON)。

几条不同射线可以有共同的性质。具有相同的$n_{\alpha l}$和$n_{\beta l}$的任何射线，形成一个运动学组。它们有相同的函数$\tau_{ray}(p)$。有相同ν_{lk}及给定震源与接收处的一些射线形成一个动力学组。在动力学组中的所有射线有相同的$M_{ray}(p)$，$F_{ray}(p)$，$U_{ray}(p)$和$R_{ray}(p)$。

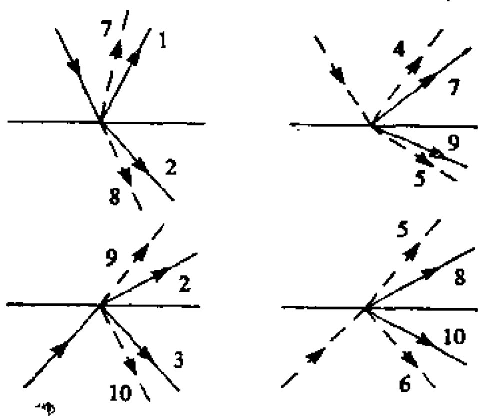


图3　系数控制变量k的说明。图示一交接面上的入射、反射和折射射线。P射线是实线，SV射线是虚线

在式(2)中，张量$\hat{m}(\omega)$和矢量$\hat{f}(\omega)$包含有震源分量的谱，即

$$\hat{m}(\omega)=\begin{bmatrix}\hat{m}_{xx}(\omega) & \hat{m}_{xz}(\omega)\\ \hat{m}_{xz}(\omega) & \hat{m}_{zz}(\omega)\end{bmatrix} \tag{3a}$$

$$\hat{f}(\omega)=\begin{bmatrix}\hat{f}_x(\omega)\\ \hat{f}_z(\omega)\end{bmatrix} \tag{3b}$$

$\hat{m}_{xx}(\omega)$等是震源矩张量的分量，即震源分布的体积积分（Gilbert，1971；Backus和Mulcaby，1976），和$\hat{f}_x(\omega)$等是体积力震源的体积积分分量，记住，这些分量是在转动过的坐标系中，这样，接收处是在$\phi=0$上（图1）。震源分量用张量$M_{ray}(p)$和矢量$F_{ray}(p)$组合的。对于P震源射线段

$$M_{ray}(p)=\frac{1}{(2\rho_0 q_{\alpha 0})^{1/2}}\begin{bmatrix}p^2 & \pm p q_{\alpha 0}\\ \pm p q_{\alpha 0} & q_{\alpha 0}^2\end{bmatrix} \tag{4a}$$

$$F_{ray}(p)=\frac{1}{(2\rho_0 q_{\alpha 0})^{1/2}}\begin{bmatrix}p\\ \pm q_{\alpha 0}\end{bmatrix} \tag{4b}$$

而对于SV震源射线段

$$M_{ray}(p)=\frac{1}{(2\rho_0 q_{\beta 0})^{1/2}}\begin{bmatrix}p q_{\beta 0} & \pm\frac{1}{2}\Omega_0\\ \pm\frac{1}{2}\Omega_0 & -p q_{\beta 0}\end{bmatrix} \tag{4c}$$

$$F_{ray}(p)=\frac{1}{(2\rho_0 q_{\beta 0})^{1/2}}\begin{bmatrix}q_{\beta 0}\\ \mp p\end{bmatrix} \tag{4d}$$

这里脚标0表示变量在震源深度$z=z_0$进行计算，且上面的符号适用于离震源向上的射线，而下面的符号则适用于离震源向下的射线。密度是ρ，$q_\alpha=[1/\alpha^2(z)-p^2]^{1/2}$是垂直P慢度，而$q_\beta$类似地是垂直S慢度，而且$\Omega=q_\beta^2-p^2$。

矢量$U_{ray}(p, z)$给出接收处分量$[u_x, u_z]^T$。对于一条P接收处射线段

$$U_{ray}(p, z)=\frac{1}{(2\rho q_\alpha)^{1/2}}\begin{bmatrix}p\\ \pm q_\alpha\end{bmatrix} \tag{5a}$$

其中ρ和q_α都在接收处计算。上面符号表示在接收处一条上行的射线，而下面符号表示下行射线。同样地，对于一条SV接收处

射线段，有

$$U_{ray}(p,\ z)=\frac{1}{(2pq_\beta)^{1/2}}\begin{bmatrix} q_\beta \\ \mp p \end{bmatrix} \tag{5b}$$

[因子$(2pq)^{-1/2}$来自WKBJ解的归一化——见Chapman和Orcutt, 1985a]。这些接收处矢量涉及到介质中的接收器。一般地，地震仪是安置在自由表面，接收器记录组合的入射和反射射线。因而，对于入射P射线，矢量是

$$U_{ray}(p,\ z)=\frac{(2q_\alpha/p)^{1/2}}{\beta^2(4p^2q_\alpha q_\beta+\Omega^2)}\begin{bmatrix} 2pq_\beta \\ \Omega \end{bmatrix} \tag{5c}$$

而对于入射SV射线，有

$$U_{ray}(p,\ z)=\frac{(2q_\beta/p)^{1/2}}{\beta^2(4p^2q_\alpha q_\beta+\Omega^2)}\begin{bmatrix} \Omega \\ -2pq_\alpha \end{bmatrix} \tag{5d}$$

子程序COMPON提供复合量 $M_{ray}(p)U_{ray}(p,\ z)$ 和 $F_{ray}(p)U_{ray}(p,\ z)$。

函数$R_{ray}(p)$是反射和折射系数的乘积：

$$R_{ray}(p)=\prod_{l=1}^{L}\left(\prod_{k=1}^{10}T_{lk}^{v_{lk}}\right) \tag{6}$$

这里T_{lk}是在第l个交接面上的系数，即$T_{l1}=R_D^{PP}$等。系数必须相对于WKBJ近似归一化。它们由下列给出

$$R_D^{PP}=(A_{\alpha-}A_{\beta+}+C_{1-}C_{2+}-D)/\Delta^{PV} \tag{7a}$$

$$R_U^{PP}=(-A_{\alpha-}A_{\beta+}+C_{1+}C_{2-}-D)/\Delta^{PV} \tag{7b}$$

$$R_D^{VV}=(-A_{\alpha+}A_{\beta-}-C_{1-}C_{2+}+D)/\Delta^{PV} \tag{7c}$$

$$R_U^{VV}=(A_{\alpha+}A_{\beta}\ -C_{1+}C_{2-}+D)/\Delta^{PV} \tag{7d}$$

$$T_U^{PP}=T_D^{PP}=F_{\alpha1}F_{\alpha2}(q_{\beta1}E_2+q_{\beta2}E_1)/\Delta^{PV} \tag{7e}$$

$$T_U^{VV}=T_D^{VV}=F_{\beta1}F_{\beta2}(q_{\alpha1}E_2+q_{\alpha2}E_1)/\Delta^{PV} \tag{7f}$$

$$R_D^{PV}=R_D^{VP}=-pF_{\alpha1}F_{\beta1}[2q_{\alpha2}q_{\beta2}E_1B_2+E_2(E_2-\rho_1)]/\rho_1\Delta^{PV} \tag{7g}$$

$$R_U^{PV}=R_U^{VP}=-pF_{\alpha2}F_{\beta2}[2q_{\alpha1}q_{\beta1}E_2B_1+E_1(E_1-\rho_2)]/\rho_2\Delta^{PV} \tag{7h}$$

$$T_D^{PV}=T_U^{VP}=-pF_{\alpha 1}F_{\beta 2}(2B_2q_{\beta 1}q_{\alpha 2}+E_1-\rho_2)/\Delta^{PV} \tag{7i}$$

$$T_D^{VP}=T_U^{PV}=-pF_{\alpha 2}F_{\beta 1}(2B_1q_{\beta 2}q_{\alpha 1}+E_2-\rho_1)/\Delta^{PV} \tag{7j}$$

其中

$$\Delta^{PV}=A_{\alpha+}A_{\beta+}-C_{1+}C_{2+}+D \tag{7k}$$

$$A_{\substack{\alpha+\\\beta-}}=\rho_2q_{\substack{\alpha 1\\\beta}}\pm\rho_1q_{\substack{\alpha 2\\\beta}} \tag{7l}$$

$$B_{\substack{1\\2}}=\mu_{\substack{1\\2}}-\mu_{\substack{2\\1}} \tag{7m}$$

$$C_{\substack{1+\\2-}}=2p[B_{\substack{1\\2}}(\pm q_{\alpha\substack{1\\2}}q_{\beta\substack{1\\2}}+p^2)-\rho_{\substack{1\\2}}] \tag{7n}$$

$$D=p^2(\rho_1+\rho_2)^2 \tag{7o}$$

$$E_{\substack{1\\2}}=\rho_{\substack{1\\2}}-2p^2B_{\substack{1\\2}} \tag{7p}$$

$$F_{\substack{\alpha 1\\\beta 2}}=(2\rho_{\substack{1\\2}}q_{\substack{\alpha 1\\\beta 2}})^{1/2}, \tag{7q}$$

这里以明显的形式应用不同的脚标。脚标 1 和 2 表示交接面上侧和下侧的介质，例如，$\rho_1=\rho(z_l+0)=\rho_{i(l)-1}$ 和 $\rho_2=\rho(z_l-0)=\rho_{i(l)}$。当存在一个转折点时，我们实际上需要$R_D^{PP}=-\text{isgn}(\omega)$和$R_D^{VV}=\text{isgn}(\omega)$，由Langer近似中得到的转折点上的"反射"系数。(相反的符号出现在P和SV波情况，因为水平位移对于SV 波，通过转折点时要改变符号，而且这是不包含在式 (5b) 中。这一点，以及其他±i的因子在式(7)和Chapman及Orcutt(1985a)结果之间是不同的，这是因为基矢量式(5)不相同的缘故。) 下面叙述的子程序COEFF提供函数$R_{ray}(p)$。

最后，在式(2)中，$\tau_{ray}(p)$是射线的延迟函数：

$$\tau_{ray}(p)=\sum_{l=1}^{L-1}\left(n_{\alpha l}\int_{z_{l+1}}^{z_l}q_\alpha(p,\ z)\mathrm{d}z+n_{\beta l}\times\int_{z_{l+1}}^{z_l}q_\beta(p,\ z)\mathrm{d}z\right) \tag{8}$$

子程序PXINT计算这个函数。

用WKBJ近似式(2)代入式(1)中，且将p范围作这样的限定，使得延迟函数式(8)是实的，则这样能正确地计算反变换。

我们得到

$$u(t,\ x,\ z)\simeq -\frac{1}{2^{3/2}|x|^{1/2}\pi^2}$$

$$\times\left\{m''(t)\cdot*\operatorname{Im}\left[\Lambda(t)*\sum_{\text{rays}}\sum_{t=\theta_{\text{ray}}}\frac{p^{1/2}M_{\text{ray}}(p)U_{\text{ray}}(p,z)R_{\text{ray}}(p)}{|\partial_p\theta_{\text{ray}}|}\right]\right.$$

$$\left.+f'(t)\cdot*\operatorname{Im}\left[\Lambda(t)*\sum_{\text{rays}}\sum_{t=\theta_{\text{ray}}}\frac{p^{1/2}F_{\text{ray}}(p)U_{\text{ray}}(p,z)R_{\text{ray}}(p)}{|\partial_p\theta_{\text{ray}}|}\right]\right\}$$

(9)

其中

$$\theta_{\text{ray}}(p,\ x)=\tau_{\text{ray}}(p)+px \tag{10}$$

算符：$*$ 和 $\cdot*$ 代表时间域中的积褶和对震源分量求和。积褶与求和的顺序，从原理上说，是任意的，且最方便的或最有效的方法与震源分量的形式和积褶的方法有关。如果所有震源分量都有相同的时间历史(例如，通常的假定为 $m(t)=m(t)m_0$)，则对分量求和能从最内边首先执行(m_0:$M_{\text{ray}}(p)$)，且对一个标量函数进行积褶($m(t)$)。

式(9)中，最内边求和是对满足下式的p值进行

$$t=\theta_{\text{ray}}(p,\ x) \tag{11}$$

并用子程序THETAC进行计算。解析时间级数$\Lambda(t)$是

$$\Lambda(t)=\lambda(t)+i\bar{\lambda}(t) \tag{12}$$

其中$\lambda(t)=H(t)t^{-1/2}$及$\bar{\lambda}(t)=H(-t)(-t)^{-1/2}$，同时，积褶算子$\partial_t\operatorname{Im}[\Lambda(t)*$是由子程序CCSQRT计算。函数式(4)—(6)只与频率正负符号有关，且在式(9)的最内边求和中，应当取正频率，即，$\operatorname{Im}(q_\alpha)\geqslant 0$。

3. 子程序说明

3.1 子程序PXINT

子程序PXINT计算延迟函数式(8)和它的导数，这导数给出了上面给定模型的范围函数$X_{ray}(p)=-\partial_p\tau_{ray}(p)$。三个不同的内插模型点之间速度的方法是

$$\alpha(z)=(a-2bz)^{-1/2} \tag{13a}$$

$$\alpha(z)=a-bz \tag{13b}$$

或者

$$\alpha(z)=a\mathrm{e}^{-bz} \tag{13c}$$

对$\beta(z)$也有类似的公式。对于每一模型间隔，用下面函数满足两模型点

$$b_i=\frac{\alpha_i^{-2}-\alpha_{i+1}^{-2}}{2(d_i-d_{i+1})} \tag{14a}$$

$$b_i=\frac{\alpha_i-\alpha_{i+1}}{d_i-d_{i+1}} \tag{14b}$$

或者

$$b_i=\frac{\ln(\alpha_i/\alpha_{i+1})}{d_i-d_{i+1}} \tag{14c}$$

用这样方法确定常数a和b。因而所要求的积分是

$$\int q_\alpha(p,\ z)\mathrm{d}z=-\frac{q_\alpha^3}{3b}\Bigg| \tag{15a}$$

$$=\frac{1}{b}\left[\ln\left(\frac{1+\alpha q_\alpha}{\alpha p}\right)-\alpha q_\alpha\right]\Bigg| \tag{15b}$$

或者

$$=\frac{1}{b}\left[q_\alpha-p\tan^{-1}\left(\frac{q_\alpha}{p}\right)\right]\Bigg| \tag{15c}$$

这里积分限是模型点，或转折点(注意，式(15a—c)的右边在转折点上是零)。用方法(a)进行内插的优点在于有效性——只要求

q_α，这种方法适用于精细的成层模型。方法（b）有简单的内插公式(13b)，它引导出圆弧射线路径，且常常应用在平面模型中。将方法(c)应用在球状模型中，因为地球展平变换会把常速度变换成函数(13c)的形式。

在子程序PXINT中，编写程序可以直接进行，而不会有困难，且很简单。避免了特殊函数等的冗繁计算。对于特殊情况$b=0$或$p=0$，程序保持有效。

子程序PXINT的输入变量是

P——p(水平慢度)

VEL(IVEL, *)——VEL(1, i)$=d_i$(深度)

VEL(2, i)$=1/\alpha_i$(P慢度)

VEL(3, i)$=1/\beta_i$(S慢度)

VEL(4, i)$=\rho_i$(密度)

VEL(5, i)$=b_i$对$\alpha(z)$

VEL(6, i)$=b_i$对$\beta(z)$

IVEL——VEL的多维数组的维数(≥6)

IL(*)——IL(l)$=i(l)$(交接面控制变量)

NPS(2, *)——NPS(1, l)$=n_{\alpha l}$(P射线段)

NPS(2, l)$=n_{\beta l}$(S射线段)

L——含有射线段的最大层数

IMTH——IMTH=1为方法(a)内插

IMTH=2为方法(b)内插

IMTH=3为方法(c)内插

输出变量是

TAU——$\tau_{ray}(p)$ （延迟函数）

X——$X_{ray}(p)=-\partial_p\tau_{ray}(p)$ （范围函数）

IRTR——IRTR=1 一般返回编码

IRTR=2 $\tau_{ray}(p)$是复数时，误差返回编码

每一个$p_j(j=1, \cdots, J)$都应调用子程序PXINT来确定每一

运动学组的延迟时间表(THETAC要求p_i以增加顺序排列)。水平慢度的可能范围受射线类型和模型限制。对于反射射线，最小水平慢度是零(相当于垂直反射)，而最大值一般是反射交接面上的慢度(相当于掠入反射)。对于转折射线，范围一般由转折层的慢度范围给定。如果任何射线段传播通过有较低慢度的模型部分，则水平慢度有进一步的限制。范围函数或者它的导数，在水平慢度上限处，常常是奇异的。因而建议在接近这个极限时，要增加表中的点密度。

3.2 子程序COMPON

子程序COMPON计算震源和接收处项(4)和(5)。也包括(9)中因子$-p^{1/2}/2^{3/2}\pi^2$。必须给定震源和接收处的射线类型和方向。这些在图4中已给予说明。子程序COMPON的编写是可直接进行的，且是简单的。

子程序COMPON的输入变量是

P——p(水平慢度)

VELS(*)——VELS(1)=$1/\alpha_0$(震源P慢度)

VELS(2)=$1/\beta_0$(震源S慢度)

VELS(3)=ρ_0(震源处密度)

ISS——震源射线类型控制变量(图4a)

ISS=1(下行P震源射线)

ISS=2(下行SV震源射线)

ISS=5(上行P震源射线)

ISS=6(上行SV震源射线)

VELR(*)——VELR(1)=$1/\alpha$(接收处P慢度)

VELR(2)=$1/\beta$(接收处S慢度)

VELR(3)=ρ(接收处密度)

IRR——接收处射线类型控制变量(图4b)

IRR=1(上行P接收处射线)

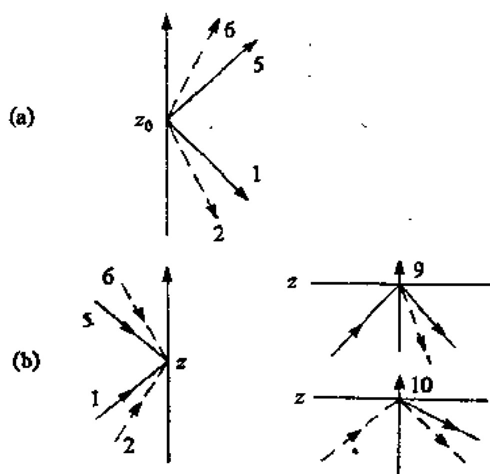


图4　震源和接收处类型控制变量。实线是P波及虚线是SV波。(a)上行及下行震源射线控制变量。(b)在介质中上行和下行接收处射线和入射在自由表面上射线的控制变量

IRR＝2(上行SV接收处射线)

IRR＝5(下行P接收处射线)

IRR＝6(下行SV接收处射线)

IRR＝9(自由表面上P射线)

IRR＝10(自由表面上SV射线)

输出变量是

COMP(＊)——$M_{ray}U_{ray}$和$F_{ray}U_{ray}$的分量

COMP(1)＝$M_{xx}U_x$

COMP(2)＝$M_{zz}U_x$

COMP(3)＝$(M_{xz}+M_{zx})U_x$

COMP(4)＝$M_{zz}U_z$

COMP(5)＝$M_{xx}U_z$

$$COMP(6)=(M_{xz}+M_{zx})U_z$$

$$COMP(7)=F_zU_x$$

$$COMP(8)=F_xU_x$$

$$COMP(9)=F_zU_z$$

$$COMP(10)=F_xU_z$$

对于一个远震P波的典型调用是

```
CALL COMPON (P,VEL(2,IS),1,VEL(2,1), 9, COMP)
```

这里我们已经应用了VELS和VELR的完全模型数组VEL部分(PXINT)，IS是震源的模型控制变量，而接收处是在自由表面上。对于射线pP，我们将取ISS=5，IRR=9，而对洋底记录的sP，有ISS=6，IRR=1以及海洋表面反射的是ISS=6，IRR=5。对于入射在自由表面上的SV射线，q_α可以是虚数，U_{ray}是复数。因而，一般言之，COMP是复数。对于每一动力学组中的每一p_i，应当调用COMPON一次。

3.3 函数COEFF

复函数COEFF计算交接面上反射系数和折射系数的乘积，即式(6)中的标积。当许多因子是共同时，子程序以一次调用计算所有要求的系数式(7)。程序编写由式(7)直接进行。垂直慢度不是实的，就是虚的，因而为了避免不必要的复运算而扩大复数算术。假定入射和生成的射线全是实的，如果反射系数R_D^{PP}和R_D^{VV}不是这种情况，则假定转折点“反射”系数(∓i)。允许有液体层，并用设定相应的S慢度$1/\beta_i$等于零来表示。允许从自由表面下边的反射，并用设定$\rho_1=0$来表示。

函数COEFF的输入变量是

P——p(水平慢度)

VEL1(*)——VEL1(1)$=1/\alpha_1$(交接面上侧P慢度)

VEL1(2)$=1/\beta_1$(交接面上侧S慢度)

VEL1(3)$=\rho_1$(交接面上侧密度)

VEL2(*)——VEL2(1) = $1/\alpha_2$(交接面下侧P慢度)

VEL2(2) = $1/\beta_2$(交接面下侧S慢度)

VEL2(3) = ρ_2(交接面下侧密度)

ID(*) ——ID(k) = ν_{jk}(系数乘子)

输出结果是

COEFF——$\prod_{k=1}^{10} T_{ik}^{\nu_{ik}}$

P-SV反射/折射系数式(7)相当复杂，代数运算错误和程序编写错误都容易发生。程序COEFF已经用各种系数与矢量式(5)组合在一起进行数值试验，确证在交接面上位移的连续性。

函数COEFF对每一p_j、交接面和动力学组，应当都调用一次。反射/折射系数对它们所包含的任何慢度会有枝割。在p_j范围内的任何枝割都是重要的，且可以形成一个首波。因为低阶法被用来计算WKBJ地震图(THETAC)，所以重要的是在接近分枝点时，对系数取样要更密些，且相对于分枝点(近似地)对称地分布p_j(这样，在适当的情况中实项和虚项抵消)。

3.4 子程序THETAC

为了计算WKBJ地震图式(9)，要求

$$v_{ray}(t,x) = \sum_{t=\theta_{ray}} \frac{C_{ray}(p)}{|\partial_p \theta_{ray}|}, \tag{16a}$$

这里v_{ray}和C_{ray}是复函数。$C_{ray}(p)$是由程序COMPON和COEFF提供的一个分量，且$\theta_{ray}(p, x)$由程序PXINT和式(10)提供。不能数值计算(16a)，因为分母可能为零。因而用长度为$2\Delta t$的归一化矩形滤波器光滑(16a)，这里Δt是数字化间隔。给定$B(t) = \frac{1}{2}\{H(t+1) - H(t-1)\}$，得到

$$\frac{B(t/\Delta t)}{\Delta t} * v_{ray}(t,x) = \frac{1}{2\Delta t}\int_{\theta_{ray}=t\pm\Delta t} C_{ray}(p)\,dp \tag{16b}$$

其中，积分对所有由$\theta_{ray}(p, x) = t - \Delta t$到$t + \Delta t$范围给定的$p$间

隔进行，常常取在正向。这由p间隔Δp在图5a 中说明。在子程序THETAC中，仅仅计算

$$w_{ray}(m\Delta t+t_0, \ x)=\sum\int_{p_a}^{p_b}C_{ray}(p)\mathrm{d}p \qquad (16c)$$

这样一个稍简化的结果，这里p_a和p_b是由$\theta_{ray}(p, \ x)=(m-1)\Delta t+t_0$到$m\Delta t+t_0$范围给定（图 5a)。求和是在给定的积分限（$p_a$, p_b)范围上进行。

有两个寻求间隔(p_a, p_b)的方法。既能给定 $t=m\Delta t+t_0$和通过整个的$\theta_{ray}(p, \ x)$表寻求间隔(p_a, p_b)；也能通过求解相应的m和加到时间级数w_{ray}上的表格，单调地进行。前一方法是低效的，因为对于M时间值，我们不得不寻求J值，即算法将含有

$$aMJ \qquad (17a)$$

运算，而后一方法近似地要求

$$bM+cJ \qquad (17b)$$

运算。常数a、b和c与θ_{ray}曲线的特征有关，但对最低阶，它们是与点的密度，即M和J无关。它们通常是小量的算术运算（约 10次)。自然，我们应用后一种方法。

假定表列θ_{ray}值$\theta_j=\theta_{ray}(p_j, \ x)$之间进行线性内插时，就能求出间隔($p_a$, p_b)(图 5b)。积分式（16c）是用以表列被积函数$C_j=C_{ray}(p_j)$的线性内插的梯形规则计算得到。为了得到一个有效的程序，在THETAC中程序编写是非常简洁的，且依次给予解释。图 6 和图 7 说明有关的变量。

考虑刚刚完成在p_j(P1＝P(J1))和p_{j+1}(P2＝P(J2))之间的p_b(PB) 上的一个间隔情况，且梯度$\theta'_j=(\theta_{j+1}-\theta_j)/(p_{j+1}-p_j)$(DTDP2)是正的。从$p_j$到$p_b$的积分是知道的(QAMP，图7a，$C_j$是 BOT 和$C_{j+1}$是 TOP)。在下一个间隔中，$p_b$变成为$p_a$，$m$(MM)是增加的，且我们寻找点$t=m\Delta t+t_0$(T)。如果$t<\theta_{j+1}$(T2)，则$p_b$是在相同间隔内，且积分(16c)用QAMP的当前值减去老的QAMP来计算(图7a)。如果$t>\theta_{j+1}$，则j是增

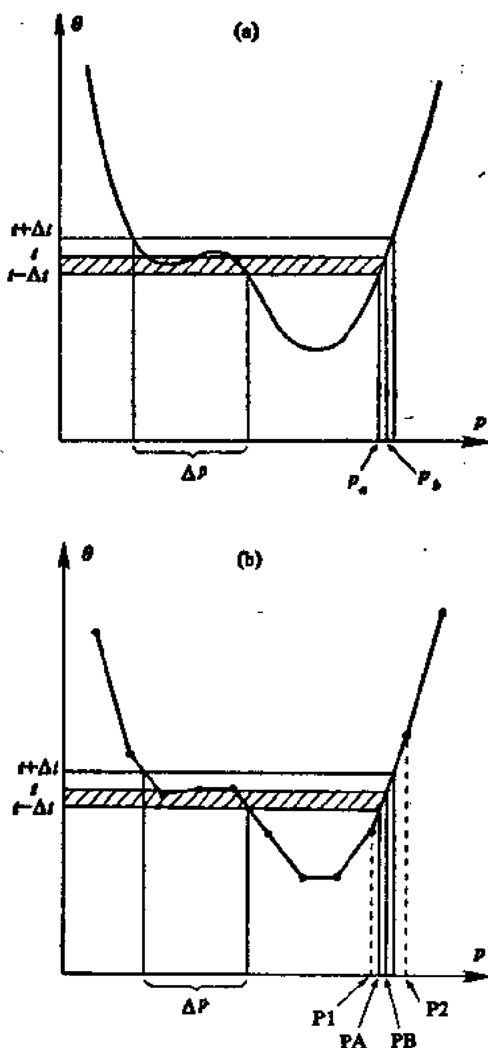


图5 说明贡献给式(16)p值的典型θ曲线。(a)有三折线的典型θ曲线；(b)以变量P1，P2，PA和PB表示的(a)的离散形式

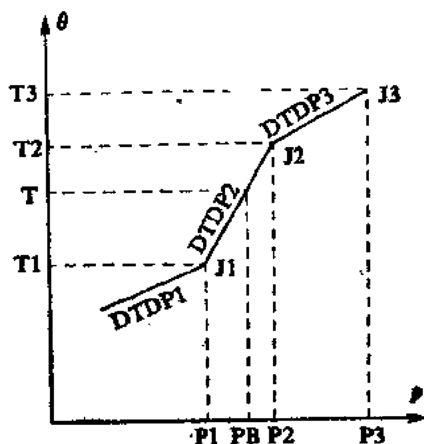


图6 表明用在THETAC中变量的离散θ曲线的一部分

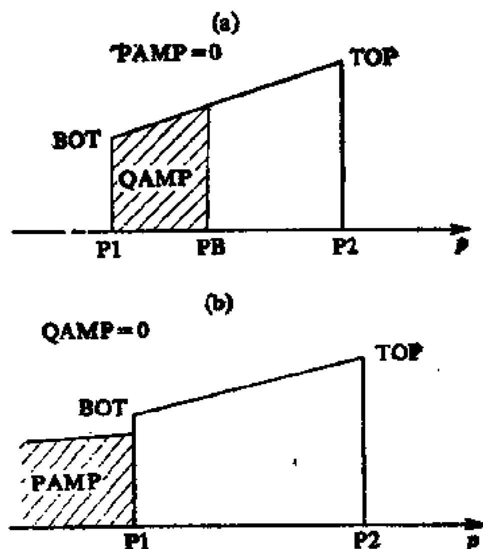


图7 表明用在 THETAC 中变量的积分部分式（16c）。
(a)积分到 t；(b)积分到 θ；

加的，且继续寻求。由p_a到新的p_j的积分被贮存在PAMP中（图7b）。

如果梯度θ'_j是负的，则除了m是减小的及条件$t\gtrless\theta_{j+1}$被倒过来外，过程是相同的。这由变量sgn(1，θ'_j)（MDIR）和sgn(Δt，θ'_j)（TDIR）控制。

如果当j是增加时，梯度的符号改变，则寻找的方向倒过来，即MDIR和TDIR改变符号。如果$\theta'_j>0>\theta'_{j+1}$（或者$\theta'_j<0<\theta'_{j+1}$），则$m$和$t$必定在新的寻求之前是减少的（或是增加的）。



图8　一个几何初动的典型地震图。虚线相当于解析表达式(16a)，而实线和点相当于离散形式(16b)

一个典型的地震图$w(m\Delta t+t_0, x)$示于图8。接近几何初动，θ'_j是小的，且典型的几个表列点C_j将对每一时间点有贡献。用户应当使得θ_j和C_j变化的非常慢，使得到所要求的精度。在所提供的程序中，不包含有自动精度条件。这个算法非常简单，用增加取样（M和J）试验精度，这样比附有精度条件而使程序编写复杂化更为有效。

对于较后边的次数，θ_j'是大的，且常常θ_j到θ_{j+1}的间隔大于Δt。由于$\theta_{ray}(p, x)$和$C_{ray}(p)$被线性内插，合成地震图由直线段组成（图8）。这些线段之间的“不连续”引起高阶（$O(\omega^{-1/2})$）波至。一般情况下，这些比几何初动小很多，不会引起问题。然而，WKBJ地震图初动算法也能用来计算微分地震图（Chapman和Orcutt，1985b）。对于微分地震图，几何初动可以不出现，且高阶波至引起很大的误差。为了减小这个问题，如果间隔$\Delta\theta_j=\theta_{j+1}-\theta_j$比$\Delta t$大的话，则修改被积函数值。在间隔$(p_j, p_{j+1})$中，作下列修改：

$$\mathrm{BOT}=\frac{2C_j|\theta_j'|}{|\theta_j'|+|\theta_{j-1}'|}\text{如果}\Delta\theta_j\text{和}\Delta\theta_{j-1}>\Delta t \tag{18a}$$

$$\mathrm{TOP}=\frac{2C_{j+1}|\theta_j'|}{|\theta_j'|+|\theta_{j+1}'|}\text{如果}\Delta\theta_j\text{和}\Delta\theta_{j-1}>\Delta t \tag{18b}$$

很容易确认，当在相邻间隔中作出这些修改时，积分式（16c）在$t=\theta_j$是连续的，且等于$2C_j\Delta t/(|\theta_j'|+|\theta_{j-1}'|)$。修正式(18)是近似地等效于应用$\theta_{ray}$的高阶内插，而不会有额外的计算困难。另外，精度最好用增加取样J来校核。

子程序THETAC的输入变量是

P(ICON, *)——$P(1,j)=p_j$（水平慢度）

TAU(ICON, *)——$\mathrm{TAU}(1,j)=\tau_{ray}(p_j)$（延迟函数）

C(ICON, *)——$(C(1, j), C(2, j))=C_j$（复被积函数）

J——表列点数

ICON——允许P、TAU和C贮存在调用程序的一个多维数组(≥2)中的多维数组维数

X——x（范围）

T0——t_0（初始时间）

DT——Δt（时间增量）

M——时间点数

地震图以输入和输出给定，这样不同的射线就能相加。为了减少积褶中的端部误差，级数的计算是从 $t_0-2\Delta t$ 到 $t_0+(M+2)\Delta t$ 进行——见下面。这样，输入/输出变量是

$W(2,*)$——$(W(1,m+3),W(2,m+3))=w(m\Delta t+t_0,x)$（复地震图，$m=-2,\cdots,M+2$）

对于每一运动学组、震源/接收处分量和范围，子程序 THETAC 应当被调用一次。在运动学组内的不同动力学组的结果应当在调用之前被相加。

3.5　子程序CCSQRT

为了完成地震图式（9）的计算，必须进行积褶。通常，接收器的传输函数也被包括进去。一般在频率域用快速 Fourier 变换来计算积褶更为有效。我们将对所有射线求和的式(16b)取 FFT（快速Fourier变换），即如下函数的FT：

$$v(m\Delta t+t_0,\ x)=\frac{1}{2\Delta t}\sum_{rays}(w_{ray}(m\Delta t+t_0,\ x)+w_{ray}(m\Delta t+\Delta t+t_0,\ x))\tag{19}$$

用"震源"项分量

$$-\omega^2\hat{m}(\omega)\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^{1/2}H(\omega)\tag{20}$$

相乘（或者，类似地由$\hat{f}(\omega)$），且进行逆 FFT。由于时间级数式(19)的非定常性质，所以在做它的 FFT 时，需要特别小心。另有一种不同的方法是取式(20)的逆FT（一个复的解析时间级数），并在时间域与式(19)进行积褶。如果$\hat{m}(\omega)$是充分带限的，则由式(20)得到的离散时间级数将有很好的特征。通常，该时间级数可以取很短，使得在时间域上作积褶很有效。

已经发现的一个很方便的不同方法，就是用有理近似法进行积褶$\partial_t \mathrm{Im}[A(t)*$。WKBJ地震图是一高频近似式，且由有理近似所引起的长周期误差很少会有麻烦。这个积褶的结果将给出脉

冲响应，即简单几何初动近似相当于一个阶梯矩震源，或一脉冲函数力源的脉冲函数。

首先，我们注意

$$\Lambda(t)=\lambda(t)+\mathrm{i}\bar{\lambda}(t)=\lambda(t)+\mathrm{i}\lambda(-t) \tag{21}$$

这样，算子的虚部能应用实部

$$\partial_t\lambda(t) \tag{22}$$

反变换来得到。Wiggins(1976) 首次建议过这个算子的有理近似，但为了降低混淆，对式(22)应用光滑是不充分的，且是非对称的，在式(21)实部和虚部之间产生相移。我们已经设计了一个对式(22)有更严格的、对称光滑的有理近似。我们对式(22)采用了三次矩形函数$B(t/\Delta t)/\Delta t$，并得到一个式(22)的离散时间级数。在时间级数中，前面100项用最小二乘方法拟合，得出有理近似的系数，在z域中，有

$$\frac{1}{6z^2}\,\frac{1+n_1z+n_2z^2+n_3z^3+n_4z^4+n_5z^5}{1+d_1z+d_2z^2+d_3z^3+d_4z^4} \tag{23}$$

结果是

$$\begin{aligned}
&n_1=1.265298, && n_2=-1.508272, && n_3=-2.047727,\\
&n_4=0.5205257, && n_5=0.8033268, &&\\
&d_1=-1.563129, && d_2=0.7167736, &&\\
&d_3=-0.1569175, && d_4=0.03977094 &&
\end{aligned} \tag{24}$$

在式(23)中，分子和分母的有效位数选取使拟合前面100项的误差为1%。为了得到一个更好的拟合，需要取更高阶的多项式。子程序CCSQRT进行组合点m和$m+1$(式(19))，并与式(23)积褶。

子程序CCSQRT的输入变量是

W(2, *)——$(W(1,m+3),W(2,m+3))=w(m\Delta t+t_0, x)$ (复地震图，$m=-2,\cdots,M+2$——THETAC输出)

M——时间点数

及输出变量是

$U(*)$——$U(m)=u(m\Delta t-\Delta t+t_n,\ x)$（实脉冲地震图，$m=1,\ \cdots,\ M$）

注意，由式(19)得的因子$(2\Delta t)^{-1}$和由式(23)得的因子1/6已经从这程序中略去。总的说来，脉冲地震图已经由一四阶矩形函数$(B(t/\Delta t)/\Delta t*)^4$光滑过。如果这是太严格的话，则算法是相当快时，最简单的变更方法是减小Δt及增加M。与此不同，另外一些积褶法也能应用。

4. 结　　论

本章中所叙述的五个子程序提供了WKBJ地震图计算的关键性要素。它们能容易地与二维和三维射线追踪程序一起，用来计算Maslov地震图(Chapman和Drummond，1982)。

一个简单的WKBJ程序已放入软件库中。它应用五个子程序来计算脉冲WKBJ地震图。目的是为它们的应用作为一个引导。用户可引入更为巧妙的模型输入和射线定义，及要输出的走时表和地震图。

附录：有衰减的WKBJ地震图

对于真实合成地震图，我们必须计入滞弹性特征。众所周知，用线性弹性理论推导的任何解能变成为一个线性粘弹性的解，只要将弹性模量由复值来替代。这就是对应性原理(Ben-Menaham和Singh，1981，第875页)。一般说，应力和应变间的本构关系表示为在时间域上一个蠕变函数和应变历史间的积褶。在频率域上，这能用复频率有关的弹性模量来描述。由此，能推导复速度。许多观测认为，许多地球材料的固有的品质因子Q很少与整个体波频率范围上的频率有关(Knopoff，1964)。Futterman(1962)认为，对所有频率都为一个不变的Q模型，从物理上说，

这是不可能的，因为这违反了因果性。某些频散是必需的。只要衰减是大的(有Q^{-2}的项能被略去)，几种不同模型能给出相同的衰减与频散关系，即

$$\frac{1}{\alpha(\omega)}\simeq\frac{1}{\alpha_{\mathrm{R}}}\left(1-\frac{1}{\pi Q_\alpha}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right|+\frac{i\operatorname{sgn}(\omega)}{2Q_\alpha}\right) \tag{A1}$$

对于$\beta(\omega)$有类似的公式。速度α_{R}是在某一参考频率ω_α的实的相速度，且Q_α是P波的不变的品质因子。导出这个近似式的参考文章及物理模型的详细内容能在Aki和Richards(1980，第5.5节)及Ben-Menaham和Singh(1981，第10章)书中找到。所应用的衰减的严格形式(如，“频率无关”模型式(A1))在如下讨论中不作详评。为了得到一个有效的算法(式(A6))，只需要合成衰减作为一个水平慢度的函数缓慢地变化，使得它能进行因子分解，拿到一般的WKBJ算法的外边。如果这个条件不满足，仍然能够应用WKBJ算法，即将p积分分成几个范围，并在每一个有不同衰减算子的范围中应用WKBJ算法。

已经说过，WKBJ算法的简易性和有效性是由振幅和延迟函数的频率无关性决定的。一般说，当有衰减计入时(式(A1))，这一特征便会失去。在本附录中，我们只讨论作某些简化假定，使能用WKBJ地震图算法来计入衰减的修正。表达式(A1)仅对大的Q_α有效，且对同阶近似，延迟函数式(8)变为

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{ray}}(p)=\tau_{\mathrm{R}}(p)-\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right|t_\alpha^*(p)\\ -\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\beta}\right|t_\beta^*(p)+\frac{i\operatorname{sgn}(\omega)}{2}t^*(p)\end{aligned} \tag{A2}$$

其中$\tau_{\mathrm{R}}(p)$是由实的相速度α_{R}和β_{R}计算的延迟函数式(8)(为简单起见，我们将右边项省去脚标“ray”)，$t_\alpha^*(p)$给定为

$$t_\alpha^*(p)=\sum_{l=1}^{L-1}n_{\alpha l}\int_{z_{l+1}}^{z_l}\frac{\mathrm{d}z}{\alpha_{\mathrm{R}}^2 q_{\alpha\mathrm{R}}Q_\alpha} \tag{A3}$$

且类似地可给出$t_\beta^*(p)$，及有$t^*(p)=t_\alpha^*(p)+t_\beta^*(p)$。我们作进一

步假设，ω_α和ω_β与深度无关，但保持它们有不相同的可能性。

Lockett (1962)，Schoenberg(1971)，Buchen (1971a，b) 和Borcherdt(1973)已经应用过描述滞弹性介质中波的物理特征的一般理论。Borcherdt(1977，1982)给出了对一般平面波反射和折射的详细的处理。Krebes和Hron(1980a，b) 已经计算了滞弹性SH波的反射和折射系数，且将它们与弹性情况作了比较。类似地，Kelamis等(1983)考虑过SH和P-SV波的广义系数。滞弹性介质中的反射和折射系数能用相同的代数表达式(7)计算，只要将慢度取成复的式(A1)即可。这导致出与频率相关的系数，但在一般情况，相关性是轻微的，且能用在讨论的频率范围内的某一参考频率，譬如说ω_0来近似这些系数。这样，在式(2)和(6)中，近似地取

$$R_{ray}(p,\ \omega)\simeq R_{ray}(p,\ \omega_0) \tag{A4}$$

等，且用在参考频率ω_0上的复慢度式(A1)计算系数式(7)。

最后，为了计算变换式(1)，我们假定函数t^*是水平慢度p的缓慢变化函数，且在变换积分式(1)中能用一常数来近似。因而有

$$t_\alpha^*(p)\simeq t_\alpha^*(p_{ray}) \tag{A5}$$

这里p_{ray}典型地取作为几何值，即$X_{ray}(p_{ray})=x$。用这些近似，衰减影响能被因子分解出来，移到积分号外边，且最后结果由一积褶表达，即式(9)变为

$$u(t,x,z)\simeq\frac{1}{2^{3/2}|x|^{1/2}\pi^2}F^{-1}\Big\{\exp\Big[-\frac{i\omega}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\alpha}\right|t_\alpha^*(p_{ray})$$

$$-\frac{i\omega}{\pi}\ln\left|\frac{\omega}{\omega_\beta}\right|t_\beta^*(p_{ray})-\frac{|\omega|t^*(p_{ray})}{2}\Big]\Big\}$$

$$*\Big\{m''(t):*$$

$$\mathrm{Im}\Big[A(t)*\sum_{rays}\sum_{s=s_{ray}}\frac{p^{1/2}M_{ray}(p,\omega_0)U_{ray}(p,\omega_0)R_{ray}(p,\ \omega_0)}{|\partial_p\theta_{ray}|}\Big]$$

$$+f'(t)\cdot*\mathrm{Im}\left[\Lambda(t)*\right.$$

$$\left.\left.\sum_{\mathrm{rays}}\sum_{p=p_{\mathrm{ray}}}\frac{p^{1/2}F_{\mathrm{ray}}(p,\ \omega_0)U_{\mathrm{ray}}(p,\omega_0)R_{\mathrm{ray}}(p,\ \omega_0)}{|\partial_p\theta_{\mathrm{ray}}|}\right]\right\}\quad(\mathrm{A6})$$

这里$F^{-1}\{\ \}$代表逆Fourier变换。不幸，对于这个时间级数没有简单的解析表达式，但却能很容易地进行数值计算。在频率域中，计算积褶是最有效。

子程序很容易进行修改，使其考虑衰减的影响。额外的模型

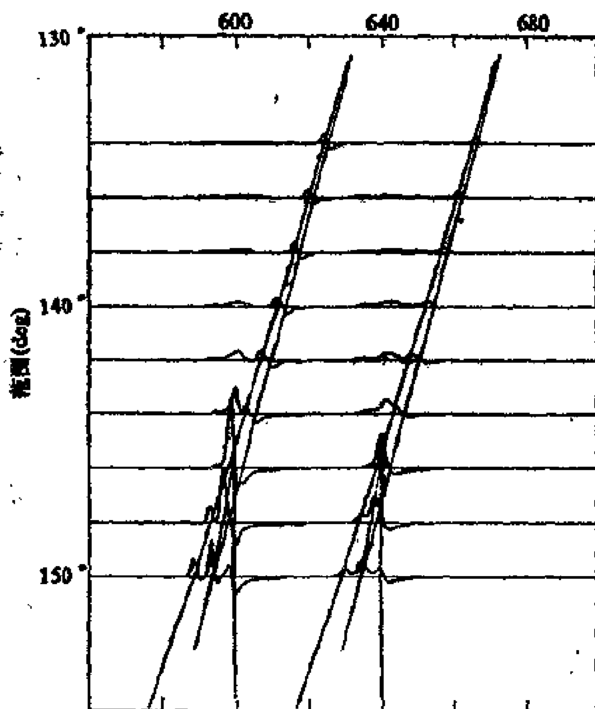


图9　对于有和没有衰减的PREM模型，由一个爆炸源，即$m_{xx}(t)=m_{zz}(t)=m_0H(t)$引起的位移垂直分量脉冲地震图。衰减地震图是40s延迟出发

参数 $1/Q_{\alpha i}$ 和 $1/Q_{\beta i}$ 加在模型数组中。子程序 PXINT 在数组 TSTAR中给出函数$t_\alpha^*(p)$和$t_\beta^*(p)$。取每一对模型点之间的Q^{-1}的平均值，计算式(A3)中的积分。程序COMPON和COEFF 将频率ω_0，ω_α和ω_β作为额外变量引进。

最后，在图9中给出，对于PREM模型(Dziewonski和Anderson，1981)，由一个爆炸源所产生的垂直位移的脉冲地震图，它们是，有和没有衰减的PKP，PKiKP和PKIKP射线。特别要注意，在145°处的PKP焦散。

第三章 非球状和椭率修正

D.J.Doornbos

(奥斯陆大学地球物理研究所)

1. 引　　言

近期表发的关于地球非球状结构的文章(Dziewonski, 1984; Giardini等, 1987)认为，需要有计算由于非球状引起的走时扰动的算法。这包括作为一种特殊情况的椭率修正的计算。适用于稍有一点非球状的最简单方法是计算一阶扰动。理论基础是由Dziewonski和Gilbert (1976) 给出，且方法可以用修改通常的一维射线追踪算法来进行。在本章中，叙述能用来计算一个非球状地球模型走时的算法。这算法也能用在由走时异常推断非球状的反演问题。反演问题已由Dziewonski(1984)给予详细的叙述。

在本文中，射线追踪算法同时考虑了由于沿着射线和/或射线通过的速度不连续处的速度扰动所引起的走时变化。不要求非球状的特殊形式，但在实际应用中，已经应用了展开成球调和的模型。像Dziewonski(1984)所指出的那样，应用Backus(1964)给出的一个转动过的坐标框架中的球调和则是方便的。在本章中，另外的一个算法是应用这种坐标变换来给出由于展开式中每一球调和引起的走时扰动。对结构非球状及地球形状椭率的模型方法将也给予一定的注意。

用于本章中的一阶扰动法是根据射线路径稳定性原理。在非球状的当今模型中，这种假定的有效性能用对三维射线追踪结果

作比较来进行试验。我收入一个例子，在这个例子中，两种方法都被应用到有一个非球状核幔边界模型的PcP，PKP和PnKP，$n\geqslant 2$波情况。

2. 速度模型

在射线追踪算法假定的球状参考模型中，速度值在半径r_i处给定，其它地方的速度值要在这些给定值之间进行内插。对于各向同性模型，有几种内插函数，所有这些函数给出了走时、角距离和通过由半径r_{i-1}和r_i所限的层中的射线的其他量的简单结果。在第一篇第二章，Chapman等给出了平地球模型的三个可能的内插公式。注意，这种简单结果仅对各向同性模型能得到；各向异性层要求通过层的数值积分。我们在一各向同性模型的假设基础上进行。本算法应用Bullen内插：

$$v=a(r/r_c)^b \qquad (1)$$

这里r_c是归一化参考半径。程序MODPS读入速度模型$v(r_i)$及计算由$r_{i-1}\leqslant r\leqslant r_i$给定的每一层参数$a_i$和$b_i$。对P和S速度都这样做。用重复有两个不同速度值的半径，即$r_i=r_{i-1}$及$v(r_i)\neq v(r_{i-1})$，给定速度不连续性。

非球状速度扰动由$\delta v(r,\theta,\varphi)$给出，其中$\theta$是余纬度及$\varphi$是经度。发表的$\delta v$模型已经用球调和展开式系数${}_kA_l^m$和${}_kB_l^m$给出(Dziewonski, 1984)：

$$\delta v(r,\theta,\varphi)=\sum_{k=0}^{K'}f_k(r)g_k(\theta,\varphi) \qquad (2)$$

$$g_k(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{l}c_l^m d_l^m({}_kA_l^m\cos m\varphi+{}_kB_l^m\sin m\varphi)\cdot P_l^m(\cos\theta) \qquad (3)$$

这里

$$c_l^m=[(2l+1)(2-\delta_{m,0})]^{1/2},\ d_l^m=\left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}$$

Dziewonski(1984)及Woodhouse和Dziewonski(1984)选择用折合归一化半径中的Legendre多项式来代表径向关系$f_k(r)$。因而，方程式(2)和(3)代表一个正支基函数的展开式。为了计算走时扰动，我们实际上需要$\delta v/v$：

$$\frac{\delta v}{v}(r,\theta,\varphi)=w(r)\sum_{k=0}^{K'}\varepsilon_k(r)g_k(\theta,\varphi) \qquad (4)$$

由此，我们在参考模型半径上给定

$$\varepsilon_k(r_j)=\frac{f_k(r_j)}{v(r_j)} \qquad k=0,\cdots,K' \qquad (5)$$

且在每一层$r_{j-1}\leqslant r\leqslant r_j$中内插。附加权因子$w(r)$能用来提供P和S速度可能差值$\delta v/v$。当描述地球结构形状的非球状影响时，这是特别有用的。非球状的这种形式能类似地由下式代表：

$$\frac{\delta r}{r}(r,\theta,\varphi)=\sum_{k=K'+1}^{K}\varepsilon_k(r)g_k(\theta,\varphi) \qquad (6)$$

在任何一层内边的最终速度扰动是

$$\frac{\delta v}{v}=-\left(\frac{r}{v}\frac{dv}{dr}\right)\frac{\delta r}{r} \qquad (7)$$

因此有$w(r)=-(r/v)dv/dr$，及在层$r_{j-1}\leqslant r\leqslant r_j$中有$w(r)=w_j=-b_j$。在$r=r_j$上，一个单一边界的扰动能选定如下形式进行模拟

$$\varepsilon_k(r)=\varepsilon_k(r_j)\delta(r-r_j)$$

程序EXMOD对所有半径r_j情况给定$\varepsilon_k(r_j)$、$0\leqslant k\leqslant K'$和$K'<k\leqslant K$，以及对所有层$r_{j-1}\leqslant r\leqslant r_j$情况给定$w_j$。对于P和S速度情况，因子$w_j$都被给定。

3. 射线追踪算法

一维射线法的理论基础包括在Bullen(1965)、Julian和Anderson(1968)、Dziewonski和Gilbert(1976)及另外一些人的著作中。一维射线理论也很好编入在更近期的科技书中(Aki和 Richards,

1980；Bullen和Bolt，1986)。在球状地球中，单程走时和半径在r_j和r_0之间射线角距离的变化能表示为

$$dT_j=\int_{r_0}^{r_j}\frac{d(\eta^2-p^2)^{1/2}}{1-\eta v'},\quad d\Delta_j=\int_{r_0}^{r_j}\frac{d\cos^{-1}(p/\eta)}{1-\eta v'} \tag{8}$$

这里p是射线参数，$\eta=r/v$及$v'=dv/dr$。对于转折射线，r_0是转折点半径。如果速度模型以这样一种方式参数化，即$1-\eta v'$在r_0和r_j之间是常数，则式(8)中的积分计算是不重要的。根据式(1)的速度内插，有

$$1-\eta v'=1-b_j$$

速度扰动δv引起走时扰动δT。取到一阶，有

$$\delta T_j=\int_{r_0}^{r_j}-\frac{\delta v}{v}\cdot\frac{d(\eta^2-p^2)^{1/2}}{1-\eta v'}=\frac{-1}{1-b_j}\int_{r_0}^{r_j}\frac{\delta v}{v}\cdot d(\eta^2-p^2)^{1/2} \tag{9}$$

如果$\delta v/v$沿着射线路径变化，积分必须数值计算。本算法将$[(\eta^2-p^2)^{1/2}]_{r_0}^{r_j}$分成为相等的子间隔，且对每一子间隔应用简单的梯形规则：

$$\delta T_j=\frac{-1}{2N(1-b_j)}[(\eta^2-p^2)^{1/2}]_{r_0}^{r_j}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{\delta v}{v}\right)_{i-1}+\left(\frac{\delta v}{v}\right)_i\right] \tag{10}$$

数字N在每一层中，对每一条射线以这样的一种方法重新设置，即要达到预设的精度。非球状的本模型是充分光滑的，使得$N=4$通常是合适的。相对速度扰动$(\delta v/v)_i$是r_i的函数，且也是与震中距Δ_i有关的角位置的函数：

$$r_i=r_c\left(\frac{a_j\eta_i}{r_c}\right)^{1/(1-b_j)} \tag{11}$$

$$\Delta_i=\Delta_j\pm\frac{1}{1-b_j}\left[\cos^{-1}\left(\frac{p}{\eta}\right)\right]_{r_i}^{r_j} \tag{12}$$

这里Δ_j是射线在r_j处的震中距，且+/−相当于通过层j下行/上行射线。

边界扰动$\delta r/r$引起走时扰动，取到一阶，有

$$\delta T=\pm\frac{\delta r}{r}(\eta^2-p^2)^{1/2}+p\delta\Delta \tag{13}$$

其中+/−相当于在边界的底侧/顶侧上的射线。式(13)中的第二项是由于射线边界交点迁移引起。取到一阶，这项将被后续的射线部分相应项所抵消。第一项也将被抵消，除非r代表速度不连续，或者射线一个端点。这算法要计算射线端点上，或与每一个交接面j的交点上的式(13)的第一项：

$$\delta T(r_j^{\mp})=\pm\frac{\delta r}{r}(\eta^2-p^2)^{1/2}|_{r=r_j} \tag{14}$$

射线追踪算法由程序EXRPS，EXTPS和RAYPS执行。程序EXRPS存储dT_j，$d\Delta_j$和扰动δT_j及$\delta T(r_j^{\mp})$。程序以变量$\delta v/v$和$\delta r/r$运行，它们的径向和角度关系在各自的子程序(分别为EXMOD和EXSIG)中给定。本应用包括用球调和表示的非球状模型。在坐标转动下(下节)，球调和的变换性质保证：走时扰动能由形式为$f_k(r)\cos m\Delta$，$f_k(r)\sin m\Delta$的$\delta v/v$和$\delta r/r$的扰动重新构成，其中$m=0,1,2,\cdots$，Δ是震中距。因而，在EXSIG中现时给定的角度关系正好是$\cos m\Delta$，$\sin m\Delta$形式。程序EXRPS常常追踪向下通过模型一部分的射线，即一条实际向上射线由它的端点返回来追踪。射线方向的意义由EXTPS控制，且一条向上射线端点的震中距是由RAYPS确定，这是一个计算沿射线与射线有关的几个量的综合目的子程序。

4. 转动坐标系中的球调和

Backus(1964)建立了坐标系转动下球调和之间的关系为：

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=e^{im\phi}\sum_{n=-l}^{l}e^{in\psi}Q_l^{mn}(\Theta)Y_l^n(\theta',\varphi') \tag{15}$$

这里(θ,φ)和(θ',φ')分别是原来坐标系和新坐标系的余纬度和经度，且Θ，ϕ和ψ是三个转动的Euler角(Backus(1964)的图1，或

Dziewonski(1984)的图2)。变换矩阵$Q_l^{m'n}$将在本节稍后讨论。Dziewonski(1984)在一个非球状模型射线追踪内容中，首次利用过关系式(15)。如果选取 $(\theta', \varphi')=\left(\frac{1}{2}\pi, \Delta\right)$，即在新坐标系的赤道平面中追踪射线。接着将式(15)分解成实部和虚部，导出

$$\left.\begin{aligned}(-1)^m d_l^m P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi=V_l^m\cos m\phi-W_l^m\sin m\phi\\(-1)^m d_l^m P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi=W_l^m\cos m\phi+V_l^m\sin m\phi\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

这里d_l^m在式(3)中给定，且

$$\left.\begin{aligned}V_l^m=&\sum_{n=0}^{l}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{n,0}\right)d_l^n P_l^n(0)\left[(-1)^n Q_l^{mn}+Q_l^{m,-n}\right]\\&\times(\cos n\psi\cos n\Delta-\sin n\psi\sin n\Delta)\\W_l^m=&\sum_{n=1}^{l}d_l^n P_l^n(0)\left[(-1)^n Q_l^{mn}-Q_l^{m,-n}\right]\\&\times(\sin n\psi\cos n\Delta+\cos n\psi\sin n\Delta)\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

由于$\cos n\Delta$或$\sin n\Delta$形式的非球状所引起的走时扰动，可用前一节中所叙述的算法进行计算：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_k(r)\cos n\Delta\to{}_k\delta T_c^n\\\varepsilon_k(r)\sin n\Delta\to{}_k\delta T_s^n\end{aligned}\right\}$$

由形式(4)和(6)非球状引起的走时扰动，因而是

$$\delta T=\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{l}{}_kA_l^m({}_k\delta T_l^m)_A+{}_kB_l^m({}_k\delta T_l^m)_B\qquad(18)$$

这里

$$\left.\begin{aligned}({}_k\delta T_l^m)_A=(-1)^m c_l^m[\cos m\phi({}_k\delta T_l^m)_V-\sin m\phi({}_k\delta T_l^m)_W]\\({}_k\delta T_l^m)_B=(-1)^m c_l^m[\cos m\phi({}_k\delta T_l^m)_W+\sin m\phi({}_k\delta T_l^m)_V]\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

$$\left.\begin{aligned}({}_k\delta T_l^m)_V=&\sum_{n=0}^{l}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{n,0}\right)d_l^n P_l^n(0)\left[(-1)^n Q_l^{mn}+Q_l^{m,-n}\right]\\&\times(\cos n\psi\,{}_k\delta T_c^n-\sin n\psi\,{}_k\delta T_s^n)\\({}_k\delta T_l^m)_W=&\sum_{n=1}^{l}d_l^n P_l^n(0)\left[(-1)^n Q_l^{mn}-Q_l^{m,-n}\right]\\&\times(\sin n\psi\,{}_k\delta T_c^n+\cos n\psi\,{}_k\delta T_s^n)\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

方程式(19)和(20)在程序EXPRO中执行。Euler角Θ、ϕ和ψ是由EXANG确定，且变换矩阵Q_l^{mn}是由EXLMN确定。这个程序是根据由Backus(1964)给出的下列关系计算的：

$$Q_l^{mn}(\Theta)=B_l^{mn}P_l^{mn}(\Theta) \tag{21}$$

这里

$$B_l^{mn}=(-1)^{l+m}[(l-m)!(l+m)!(l-n)!(l+n)!]^{1/2} \tag{22}$$

及$P_l^{mn}(\Theta)$, $m,n,=-l,\cdots,l$能用$m=-l$的值确定。

$$P_l^{-ln}=\frac{(\cos\frac{1}{2}\Theta)^{l-n}(\sin\frac{1}{2}\Theta)^{l+n}}{(l+n)!(l-n)!} \tag{23}$$

递推关系是

$$(l+m+1)P_l^{m+1,n}=-(m+n)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Theta P_l^{mn}-(l-n+1)P_l^{m,n-1} \tag{24}$$

及对称关系

$$\left.\begin{aligned}P_l^{mn}&=P_l^{nm}\\P_l^{mn}&=(-1)^{m+n}P_l^{-m,-n}\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

程序包包括一个实例程序EXASP，它应用在这节中和上一节中所叙述的程序，对一个给定的震源和接收位置，由式(19)产生$({}_k\delta T_l^m)_A$和$({}_k\delta T_l^m)_B$项，及由式(18)得出最后的非球状修正δT。

5. 椭率修正

地球的椭率由$\varepsilon(r)$给出，其中

$$\frac{\delta r}{r}(r,\theta,\varphi)=\varepsilon(r)\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right)=-\frac{2}{3}\varepsilon(r)P_2^0(\cos\theta) \tag{26}$$

及，从式(7)，有

$$\frac{\delta v}{v}(r,\theta,\varphi)=\frac{2}{3}\left(\frac{r}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\varepsilon(r)P_2^0(\cos\theta) \tag{27}$$

因而，在式(3)，(4)和(6)的展开式中，有

$$K'=0, K=1, {}_kA_l^m=-\frac{2}{3\sqrt{5}}\delta_{l2}\delta_{m0}, {}_kB_l^m=0, k=0,1 \quad (28)$$

在参考模型的半径r_j上，有

$$\varepsilon_0(r_j)=\varepsilon_1(r_j)=\varepsilon(r_j) \quad (29a)$$

及在层j上，$r_{j-1}\leqslant r\leqslant r_j$，有

$$w_j=-b_j \quad (29b)$$

系数$\varepsilon_k(r_j)$和w_j由程序ELMOD确定，它代替EXMOD。$\varepsilon(r_j)$所采用的值取自Bullen(1975)的书中。

在这种情况中坐标转动的优点也能借采用Legendre函数的加法定理来实现：

$$P_l^0(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{l}(2-\delta_{m,0})\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\Delta)\cos m\zeta \quad (30)$$

这里θ_0是震源点的余纬度，ζ是离开震源时射线方向的方位角。Dziewonski和Gilbert(1976)算法是直接基于式(30)。为了执行这个算法，我们需要修改给定角度关系的程序EXSIG，修改过的程序ELSIG给出$P_2^m(\cos\Delta), m=0,1,2$。我们还需要修改由式(19)获得的走时项：$({}_k\delta T_l^m)_A$和$({}_k\delta T_l^m)_B$的程序EXPRO，修改过的程序ELPRO用式(30)来计算$({}_k\delta T_2^0)_A$，$k=0,1$。因而椭率修正δT直接从式(18)和(28)得出。射线追踪程序（EXRPS，EXTPS和RAYPS）和实例应用程序EXASP不需要作修改。

6. 试验情况：核幔边界

非球状走时修正的有意义部分是由于内部边界的扰动引起。近期试验已经产生由至少有10km峰谷幅度、大的长波地形为特征的核幔边界模型(Morelli和Dziewonski，1987；Creager和Jordan，1986)。我们已经将第3节和第4节的算法应用到一个Morelli和Dziewonski模型中，这个模型用高到四阶的球调和给出，且我们已经将走时残差与在相同模型中，用三维射线追踪所得到的结果

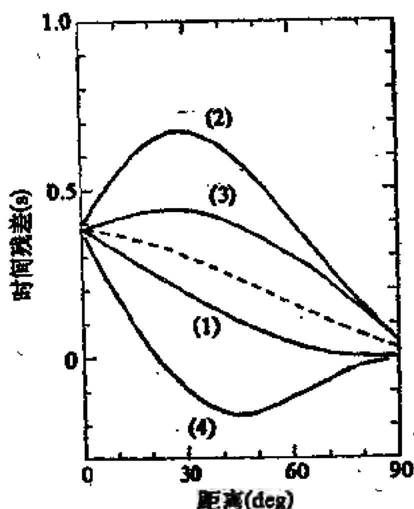


图 1　Morelli和Dziewonski(1987)得到的核幔非球状模型的PcP走时残差。震中设置在零纬度和零经度，(1)、(2)、(3)和(4)情况分别代表离震源的N，E，S和W方位方向。点线给出有2.5km核幔边界半径的减小时的走时残差

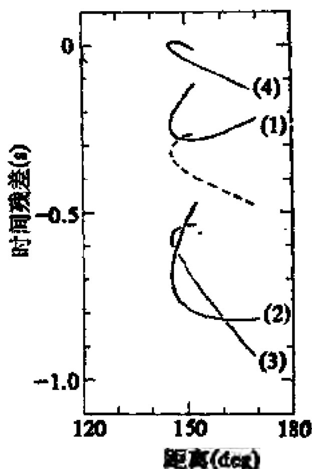


图 2　PKP的AB和BC分枝的走时残差。其他的说明如同图 1

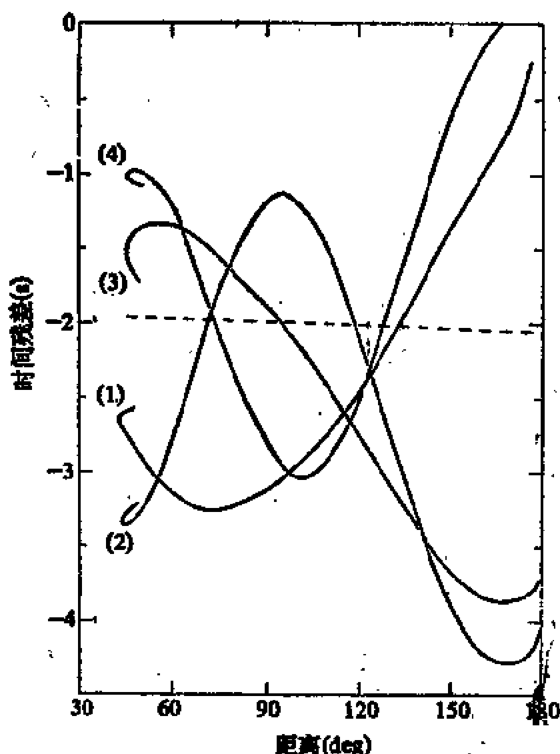


图 3　P4KP的AB和BC分枝的走时残差。其他说明同图 1

进行了比较。这个练习的目的不在于证实模型，而在于试验在大的波长、非球状情况中的算法。一些结果示于图1—4中。

在这些实例中，假定震源安置在零纬度和零经度，且假定接收处是在离震源的四个不同方位方向(N，E，S和W方向)。走时残差是对PcP情况，及对PKP和PnKP，$n \geqslant 2$的AB和BC分枝情况计算的。通过内核的PnKP分枝没有被利用。因为模型边界相对于标准地球模型(PREM)有－2.5km平均上升，所以有一个PcP的平均正残差，及一个PKP和PnKP的平均负残差。对于这个平均值还存在有一个很大的变化，这种变化随着反射数目的增

加，即增加PnKP中的n数，而增大。图4中的空白柱给出不同震相的理论数据的平方差，及阴线柱给出由两种方法得出的结果间的平均平方根差。平均平方根误差对PcP和PKP情况是可以略去的。而对于PnKP情况，误差增加，但在所有情况下，误差都是小于根方差的20%。最大的误差出现在震中距接近180°的倍数上(对跖点和震中上)。在这些区域，走时分析无论如何将不会是可靠的。这些结果认为扰动法是适合于对地球长波长、非球状的通用模型计算走时。

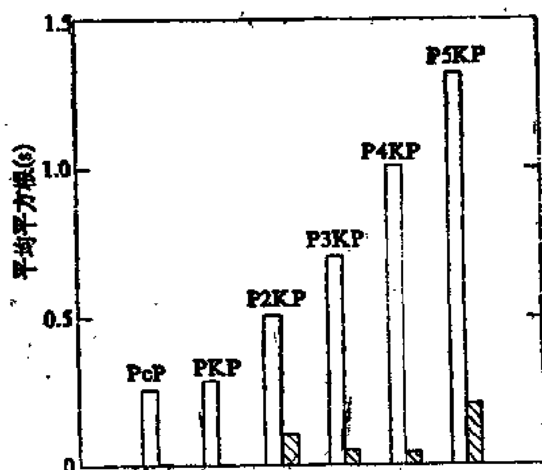


图4　有非球状核-幔边界模型的核震相走时根方差(空白柱)，及用扰动法计算的走时平均平方根误差(阴线柱)

第 二 篇

三维介质中的射线和体波

第一章　三维结构中完全地震射线追踪

V.Červený

（查理士大学地球物理研究所）

L.Klimeš

（捷克和斯洛伐克科学院地质和地球技术研究所）

I.Pšenčík

（捷克和斯洛伐克科学院地球物理研究所）

1. 引　　言

射线法及其开拓在复杂的二维和三维结构中的数字模拟和地震波场解释中都有许多应用。在射线法应用中，基本的且数值上最耗时间的步骤是射线的计算。射线追踪不单在射线法本身中，而且在其更复杂的开拓中起了重要的作用。在标准射线追踪中，只能确定射线轨迹、走时及沿着射线的慢度矢量。慢度矢量的分量还表示走时场相对于空间坐标的一阶偏导数。所有这些量，在某些地震学应用中是非常重要的，但对解决许多其他地震学问题却并不充分的。

然而，有可能稍微开拓射线追踪算法，并且计算沿着射线的许多其他地震学的重要参量（既在地震波场的数值模拟中，也在反演问题的求解中）。在另一些事情中，可以用所谓动力学射线追踪去计算射线的传播矩阵。如果知道了射线传播矩阵，那么，在所计算的射线附近的许多重要的地震学问题都可以解析地解

出，而不用附加的数值射线追踪。还能毫不困难地计算沿着射线的一些其他量，然后，用这些量对射线幅度作一简单的计算。

本章提出并详细叙述完全射线追踪的一种算法。完全射线追踪包含有(a)标准射线追踪，(b)动力学射线追踪(射线传播矩阵的计算)和(c)拆合矢量的复数值幅度分量的计算。完全射线追踪的算法，当然比标准射线追踪算法包含有更多的内容，但在数值上，完全射线追踪不会比射线追踪本身花更多时间。完全射线追踪显著地扩大了标准射线追踪的可能性和应用性，且一定会在复结构的高频(HF)地震体波场的数值模拟和地震反演问题求解而设计的大多数程序包中寻得一个重要的地位。

在完全射线追踪算法中，考虑用任意曲线坐标系给出的三维侧向变化、各向同性的块状结构。模型的给定颇为通用，且在原理上遵从Gjφystdal等(1985)的建议。他所提出的算法允许我们实际上考虑这种介质中传播的任何类型的地震HF体波。

本章中所叙述的算法不总是简单和直接可做的。然而，若无节制地要推导所有要求的方程和从地震学观点解释算法中所有步骤，这势必会增加本章的篇幅。在一般三维(3D)成层介质中，完全射线追踪的最完善和最连贯的理论在Červený文章(1985a)中可以找到。在后面的工作中，采用直角坐标系，但这里所提出的算法是对任意曲线坐标系写出的，所以，在算法中所要求的全部方程以完善的形式给出，即使没有给出它们的推导情况下也这样。

对于给定的地震学问题，使用某些简化算法将会使计算更有效。本章只考虑最一般情况，特殊情况的简化留给读者。

这里采用的完全射线追踪算法的结构如下。完全射线追踪的整个问题分成为几个多少有些独立的算法。本章包括这些算法的详细叙述。对于三维结构中一条单一射线的完全射线追踪的算法系统是完善的和充分的。完全射线追踪的结果被贮存在输出文件中，以备较后的各种重要的地震学问题中应用。

在这里提出的完全射线追踪算法的推导中，大量利用了在复二维和三维结构中高频地震波场的数值模拟及二维和三维地震射线包的长期经验。这就使我们能提出一些更为普遍和有效的算法以及整个程序更为方便的结构。本章叙述这样一个新程序的算法。

在提出的算法中，只考虑用专门的初始条件给定的、一种选择过的基本波的单一射线。下面仅扼要、而不是完全普遍性地讨论近轴射线的两点射线追踪问题。完全射线追踪的结果提供了解析地解出近轴射线的两点射线追踪问题的可能性(第7.12节)。两点射线追踪问题的通解不包括在完全射线追踪算法中，虽然完全射线追踪的结果可以用在这种问题中。同样，完全射线追踪的结果在合成地震图、合成频率响应、弹性动力学 Green 函数等计算中都是十分重要，但要求考虑各种基本波的射线的计算。因而，为了完成这些，用户必须提供自己的程序，在这个程序中，将要逐次地用到基本波单独射线的完全射线追踪程序。为了读者方便，在第7.20—7.22节次中，给出了这种计算的全部公式。

在完全射线追踪中，只将标准(零阶)射线近似用来计算幅度。但，完全射线追踪也给出了在奇异域(焦散和临界区域附近等)的高频地震波场计算中和在各种衍射波计算中的十分有用的和重要的量。这类计算可以用没有在这里提出的程序来完成，但包含完全射线追踪的结果。同样，在Gauss光束计算以及用 Gauss 光束求和法、扩展 WKBJ 法或 Maslov 法等计算高频地震体波场中，完全射线追踪都是一个基本程序。这个题目的详细处理已超出本章的范围。

本章中的大多数公式以分量符号写出。大写字母指标(I, J, $K,A,B,\cdots$)取值1和2，下标(i,j,k,a, b, $\cdots$)取值1、2、3，希腊字母下标($\alpha,\beta,\gamma,\cdots$)取值1、2、3、4。对于重复下标和上标情况，则采用Einstein求和规则。

与分量符号一起，也应用矩阵符号。矩阵用黑正体字母表

示。为了区分2×2和3×3矩阵，用字母上加“∧”来表示后者。如果相同的粗黑体字母带有“∧”代表3×3矩阵，而不带有“∧”的为2×2矩阵(例如$\hat{\mathbf{M}}$和M)，因而矩阵M是3×3矩阵$\hat{\mathbf{M}}$的左上角的2×2子矩阵。这样，M_{ij}是M的分量，而M_{ij}是$\hat{\mathbf{M}}$的分量。

2. 坐 标 系

2.1 量度张量和Christoffel符号

考虑通常的右手曲线坐标系(x^1, x^2, x^3)。坐标系的局部性质，由量度张量的协变分量$G_{ij}=G_{ij}(x^k)$或逆变分量$G^{ij}=G^{ij}(x^k)$, $i,j,k=1,2,3$, 及Christoffel符号

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}G^{kl}(G_{il,j}+G_{jl,i}-G_{ij,l}) \qquad (2.1)$$

来表征。量度张量是对称的，且一般具有六个独立分量。量度张量的协变分量G_{ij}和逆变分量G^{ij}间有如下关系：

$$G^{ij}G_{jk}=\delta^i_k$$

其中δ^i_j是混合协变和逆变Kronecker delta，它当$i=j$时，等于1，而在其他情况，则等于0。无限小长度ds的平方能够用量度张量表示如下：

$$ds^2=G_{ij}dx^i dx^j$$

一般存在18个独立的Christoffel符号。

为了确定任何点上的量度张量和Christoffel符号而设计的程序，在这里称为METRIC。

2.2 最重要坐标系的实例

2.2.1 直角坐标系

在直角坐标中，

$$G_{ij}=\delta_{ij}, G^{ij}=\delta^{ij} \qquad (2.2)$$

$$\Gamma^k_{ij}=0 \tag{2.3}$$

这里Kronecker delta的协变和逆变形式δ_{ij}和δ^{ij}与上面δ^i_j有相同的数值。

2.2.2 球极坐标系

引进球极坐标系$(x^1,x^2,x^3)=(\vartheta,\ \lambda,\ r)$如下：$\vartheta$是余纬(向南为正，$0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$)，$\lambda$是经度(向东为正，$0\leqslant\lambda<2\pi$)及$r$是径向距离($r\geqslant0$)。量度张量为

$$G_{ij}=\begin{bmatrix} r^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad G^{ij}=\begin{bmatrix} r^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2}\sin^{-2}\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Christoffel符号是

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma^1_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & -\sin\vartheta\cos\vartheta & 0 \\ r^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \Gamma^2_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & \operatorname{ctg}\vartheta & 0 \\ \operatorname{ctg}\vartheta & 0 & r^{-1} \\ 0 & r^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &\Gamma^3_{ij}=\begin{bmatrix} -r & 0 & 0 \\ 0 & -r\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

更普遍的是使用球极坐标系$(x^1,x^2,x^3)=(r,\ \vartheta,\ \lambda)$。如果用$x^3=f(x^1,x^2)$形式表示交接面，则选用$(x^1,x^2,x^3)=(\vartheta,\ \lambda,\ r)$会更合适。

2.2.3 地理球坐标系

引进地理球坐标系$(x^1,x^2,x^3)=(\lambda,\ \vartheta,\ r)$如下：$\lambda$是经度(向东为正，$0\leqslant\lambda<2\pi$)，$\vartheta$是纬度$\left(向北为正，-\frac{1}{2}\pi\leqslant\vartheta\leqslant\frac{1}{2}\pi\right)$及$r$是径向距离($r\geqslant0$)。因而量度张量为

$$G_{ij}=\begin{bmatrix} r^2\cos^2\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad G^{ij}=\begin{bmatrix} r^{-2}\cos^{-2}\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Christoffel符号是

$$
\left.\begin{aligned}
&\Gamma^1_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{tg}\vartheta & r^{-1} \\ -\mathrm{tg}\vartheta & 0 & 0 \\ r^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Gamma^2_{ij}=\begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & r^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\
&\Gamma^3_{ij}=\begin{bmatrix} -r\cos^2\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}
$$

2.2.4 其他坐标系

可以应用任何其他坐标系来替代上述坐标系。例如，如果考虑地球椭球率，则可应用椭球坐标系。通常直接写出其他坐标系中的量度张量。

3. 介 质 模 型

3.1 模　型

模型M用表征介质参数分布的函数定义在空间体积内边，

$$
M: x^i_{\min} \leqslant x^i \leqslant x^i_{\max} \ (i=1,2,\ 3) \tag{3.1}
$$

坐标曲面$x^i=x^i_{\min}$和$x^i=x^i_{\max}$是模型的边界。介质参数是P、S波速度v_P、v_S，密度ρ，耗损因子Q_P^{-1}、Q_S^{-1}，或者这些量的某些幂次。用这种方法，速度分布可由速度值，速度平方值，慢度值，慢度平方值等给定。同样，可以考虑耗损因子的倒数值，即品质因子Q_P和Q_S来替代耗损因子。介质参数在模型内部必须是坐标的光滑函数，这里"光滑"的意思是参数和它们的一阶和二阶偏导数必须是连续的。它们分布的光滑性可以在有限的交接面上被破坏，即通过这些交接面，参数或它们的一阶或二阶偏导数可以不连续。

我们考虑的模型中，每一个这样的交接面可以被有限个的具有如下性质的光滑曲面$\Sigma: f(x^i)=0$构成：函数$f(x^i)$在整个M中

有定义，且是光滑的，即$f(x^i)$和它们的一阶和二阶导数在M中处处连续。曲面间可以互相相交。它们可以通过整个模型并交在模型的边界上，也可以在模型M内形成一些封闭曲面(例如椭球形的)。每一曲面将整个模型分成为两部分：正部，其中有$f(x^i)>0$；负部，有$f(x^i)<0$。相应地，曲面朝模型正部那一侧，称作为曲面Σ的正侧，另一侧则称作为曲面Σ的负侧。这些光滑曲面Σ可以用整数以升阶顺序作控制变量，以1起算。

像在Gjφystdal等文章(1985)那样，可以由光滑曲面Σ分成的两类块体来构成模型：简单块体(SB)是模型的"建筑砖块"，它们没有物理意义；复块体(CB)代表模型的物理单元。材料块体和自由空间块体之间的差别为，在材料块体中，密度常常是非零且为正；在自由空间块体中，密度却恒为零。

简单块体(SB)由曲面$f(x^i)=0$的两个有限系列F^+和F^-来定义。点x^i要位于块体之内，只有也必须有这样条件

$$\left.\begin{array}{ll} f(x^i)>0 & \text{对于任何} f\in F^+ \\ f(x^i)<0 & \text{对于任何} f\in F^- \end{array}\right\} \qquad (3.2)$$

简单块体是相当于F^+系列曲面的模型正部和相当于F^-系列曲面的模型负部的一个交集(Gjφystdal等，1985)。一个实例示于图1(第3.4节)。只有曲面Σ的一部分可以作为一个块体的边界——其余部分只是边界的假想的外延。有些简单块体的边界也可以由模型的部分边界形成。注意，一个简单块体可以由几个单独区域形成，而不仅仅由一个单连通域形成。

将模型分成一些简单块体不是单一的。SB(简单块体)不必形成一个不连接的系统，即模型中的一点可以位于几个SB中。SB可以由正整数按上升的次序作控制变量，起始为1。仅仅对材料块体作控制变量，且让自由空间块体没有控制变量，这是合理的。用这种方法，没有控制变量的块体可以立即被确认为自由空间，而不需要再核实密度是否为零。

简单块体概念不允许考虑这样的一些块体，即在这些块体

中，块体边界假想的外延侵入块体中（第3.4节中的图2），这意思是一个模型的"物理"块体可以由几个简单块体来模拟。为了避免模型的这种人为分割，这种分割还会使波的编码复杂化(第4节)，因而引进了复块体。

一个复块体(CB)由几个简单块体联结形成(当然也可以正好由一个简单块体构成)。这个联合可以用一张给定简单块体指标的表格来确定，这些简单块体应当包括在复块体中。虽然SB不必形成一个不连接系统，但CB(复块体)必须形成一个不连接系统。模型的任何点必须只位于一个CB中。CB的边界，它也可以称为交接面，由SB的边界形成。CB可以用正指标作控制变量，由1开始。对块体作控制变量的系统可以是任意的，但某些系统可以使计算更有效。材料复块体必须仅仅包含材料SB。由自由空间SB形成的复块体称作自由空间复块体。

注意，在下面的节次中，将引进一些附加曲面，这些曲面有相同的性质，且可以用同样的方法作为上面所说的光滑曲面Σ面给出。但它们有不同的含义。一组这些曲面的目的是贮存用完全射线追踪法得到的全部量值；否则它们是完全透明的，即它们对射线追踪没有影响(第5.5.2节)。另外一组则包含完全射线追踪将要终止的一些曲面(第5.4节，情况(f))。

3.2 给定模型的资料和程序

一旦给定在第3.2.1节所定义的资料和定义曲面$f(x^i)=0$的程序及介质参数(第3.2.2和3.2.3节)，则完全确定了模型。

3.2.1 给定模型的资料

(a) 控制变量NEXPV，NEXPQ在输入数据中给出速度(NEXPV)和耗损系数(NEXPQ)的幂指数。例如，控制变量NEXPV和NEXPQ为1表示介质参数是速度和耗损因子，控制变量等于－1，表示这些量的倒数值，即慢度和品质因子。

(b) 模型边界x^1_{min}，x^1_{max}，x^2_{min}，x^2_{max}，x^3_{min}，x^3_{max}。

(c) 模型中的光滑曲面Σ的数目NSRFC。这些曲面用正整数从1到NSRFC依次作控制变量。

(d) 模型中材料简单块体数NSB。这些块体用正整数ISB，从1到NSB依次作控制变量。自由空间块体没有控制变量。

(e) 对于带有控制变量ISB的每一简单块体，形成一套F^{+}_{ISB}曲面控制变量和形成一套F^{-}_{ISB}曲面控制变量。F^{+}_{ISB}曲面控制变量以正号贮存，而F^{-}_{ISB}则以负号贮存。控制变量可以以任意顺序给出。

(f) 模型中材料复块体数NCB。块体由正整数ICB，从1到NCB依次作控制变量。自由空间块体没有控制变量。

(g) 对于每一复块体，形成了复块体的简单块体的控制变量。控制变量可以以任意顺序给出。

3.2.2 光滑曲面的给定

函数$f(x^i)$可以用简单的解析表达式、离散点上给定值的内插或近似等等给出。这些函数的系数可以准备在用户给定的程序SRFC1中，在此程序中，与曲面$f(x^i)=0$有关的输入数据也可以读入。在某一给定点上的函数值以及函数$f(x^i)$的一阶和二阶偏导数，都可用在这里称作为SRFC2的用户给定程序中得到。

3.2.3 介质参数的给定

在每一复块体中，介质参数的分布可由简单解析表达式，在离散点上给出的数值内插或近似等给定。这些参数既可以是P波和S波速度、密度和耗损因子，也可以是它们的幂次。这些参数中任一个的分布也可以用另一个参数的分布来表示，例如，$v_S=0.577v_P$，或者$\rho=1.7+0.2v_P$，这里v_P，v_S和ρ是P波速度、S波速度和密度。这些函数的系数可准备在这里称作为PARM1的用户给定程序中，在这个程序中，与每一复块体内的单独参数分布有关的输入数据可以读入。函数值及这些函数的一阶和二阶偏导数可以在用户给定的程序PARM2中得到。

3.3 辅助方法

对于完全射线追踪，可以用某些辅助方法给定一点相对于简单和复块体及光滑曲面的位置，或者将给定介质参数变换成速度、密度及耗损因子。这些辅助方法没有给定模型，它们仅仅为完全射线追踪方法服务。

3.3.1 块体控制变量的确定

为了确定其中有一给定点(如点源)的简单块体及复块体的控制变量，可以应用这里称作为 BLOCK的程序。这个程序也可以用来确定与给定块体在其边界上一点相接触的任一块体的控制变量(当一射线入射到一块体界面时可能发生这种情况)。程序的其他功能是可以确定包围块体并将这个块体从给定点分离开来的曲面的控制变量(如果对于任何 $x^i \in A$，$y^i \in B$ 有 $f(x^i)f(y^i)<0$，则曲面$f(x^i)=0$将A系列与B系列隔开)。

3.3.2 介质参数的变换

将介质参数值变换成相当类型波的速度和耗损因子的程序称作为VELOC。

3.4 实　　例

下面是几个如何构成完全射线追踪模型的例子。列举的是由直角坐标系给定的三维模型的横截面。当然，它们也可像二维模型那样给予解释。一些单独图形常常包含一幅模型图和一幅(或者几幅)用简单块体表示的图。在一些光滑曲面以下的模型部分认为是正的，面其上则认为是模型的负部。在封闭曲面情况，模型的正部是在封闭曲面的外边。附在图中的图例给出了每一简单块体的 ISB，属于系列 F^{+}_{ISB}(正数)和 F^{-}_{ISB}(负数的绝对值)曲面的控制变量。

为更好地理解这节后边所示模型的独特图形，首先描出一个简单块体的草图(图 1)。同样，图 2 表示一个物理(复)块体，它

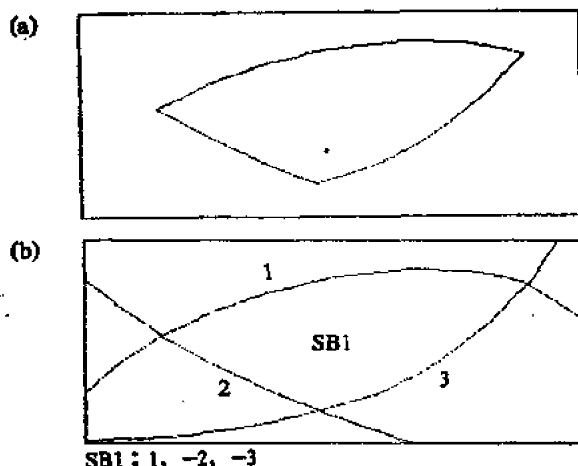


图1 (a)简单块体；(b)控制变量为1,2,3的三个曲面的表象

可以用各种方法将几个简单块体联结而成。

例1：成层结构

图3a表示一个简单成层结构的模型。层是由不相交的光滑交接面相隔而成。这样一种用简单块体表达的结构(图3b)是非常简单的。每一个交接面由一个光滑曲面Σ代表，每一层由一简单块体代表。在这种情况中，复块体恒等于简单块体。

例2：孤立体A

图4a表示含有一个孤立体的成层结构。对于两种不同控制变量曲面系统和SB，用简单块体表示的模型示于图4b，c中。这也是非常简单的。由一个光滑曲面表示的每一个交接面，如图4b中曲面2和图4c中曲面1，是封闭曲面。一个孤立体代表一个简单块体，而层的其余部分代表另一个块体。复块体再一次恒等于简单块体。在图4b和c中，复块体都从上至下作控制变量标记。

例3：孤立体B

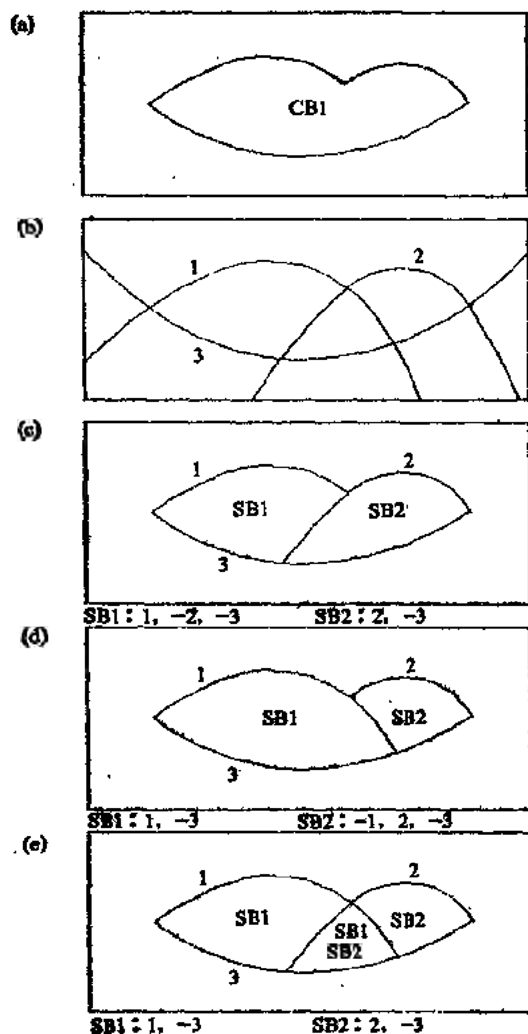


图2　(a)复块体；(b)构成(a)边界的三个曲面1，2，3；(c，d，e)用几种方法，以两个简单块体构成复块体(a)

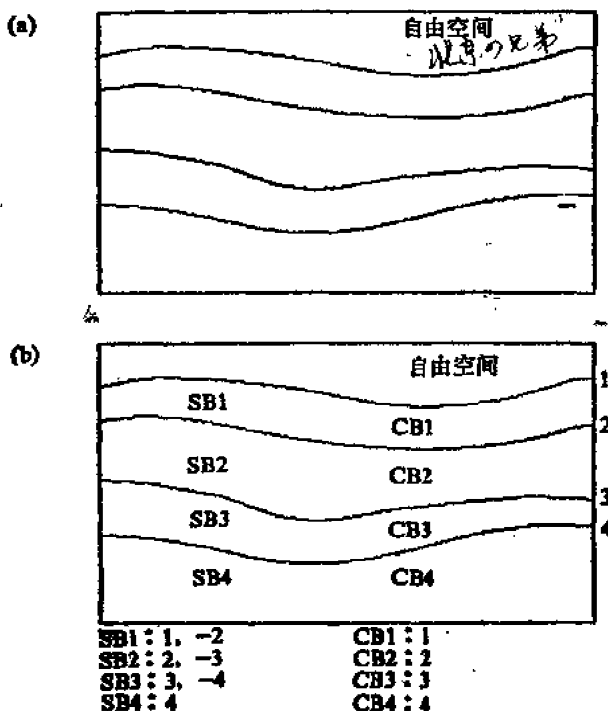


图3 (a)简单成层结构的模型；(b)它的计算表象

图5a表示一个含有带边缘孤立体的成层结构模型。以简单块体组成的各种可能表象示于图5b，c中。这个例子表明：(i)模型分成简单块体可以是非单一的；(ii)虽然由简单块体1和3代表的区域是一个物理单位(图5a)，但它不能被单一的简单块体所代表(区域包含的点既位于相对于光滑曲面1或3的模型的正部，也位于模型的负部，见图2)。然而简单块体1和3可以合起来形成一个有相同物理性质的复块体(图5d)。复块体2和3恒等于简单块体。

例4：断裂结构

图6a表示一个带有沉积物覆盖的简单断裂结构模型。它的简

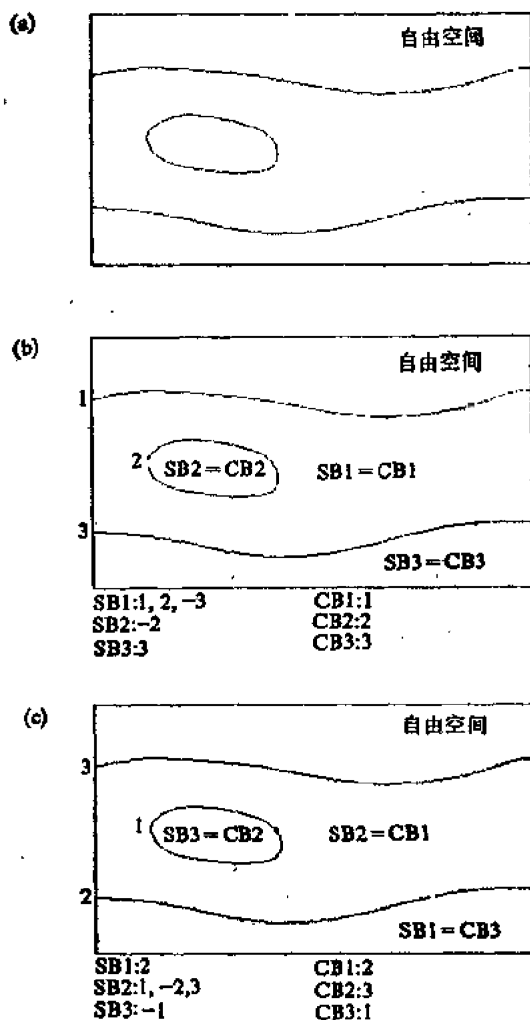


图4 (a)一个光滑孤立体模型；(b,c)它的两个计算表象

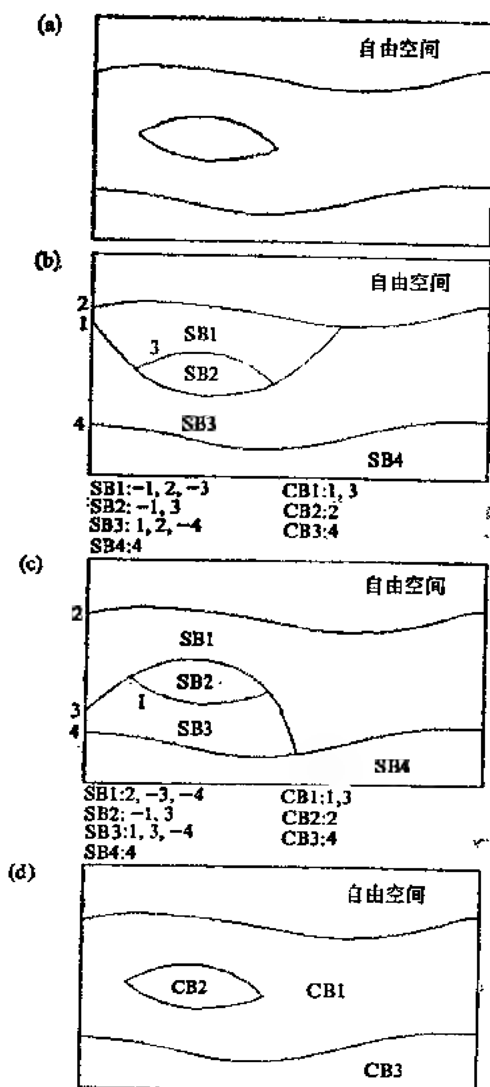


图5 (a)带边缘孤立块体模型；(b,c)它的两个简单块体计算表象；(d)在两个表象中，复块体是等效的

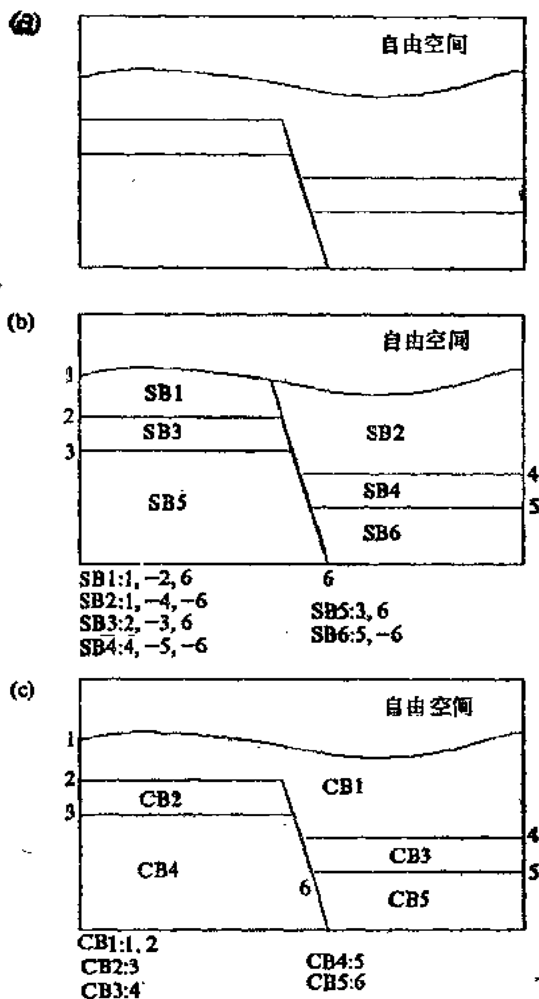


图6 (a)带有沉积物覆盖的断裂结构模型；(b)它的简单块体计算表象；(c)它的复块体计算表象

单块体表象示于图6a中。简单块体 1 和 2 可以合起来形成一个复块体，其他一些复块体恒等于简单块体。

4. 基本波编码

考虑普通的地震体波，例如折射波，初次或多次反射波，可能的转换波。一般说，一种波入射在交接面上(复块体的边界)要产生四种波：反射P和S波及折射P和S波。当进行完全射线追踪时，必须预先知道要追踪四种生成波中的哪一种，对每个交接面都要做出这种决定。一条给定射线的从头到尾的特性字母数字串是一个编码。

术语“基本波”在文献中不具有单一意义。这里将该术语应用于由一给定编码所表述波场的一部分。因为可以有各种类型编码，所以也可以有许多不同的把波场分成为基本波的分法。

术语“射线元”在编码结构中有重要意义。当射线完全在一个复块体内，用射线元代表两个相继反射/折射点间，或者射线起点或终点与最近的反射/折射点间，或者起点和终点间的复块体中的那一段射线。

基本波编码的可能类型有多种。通常它们由一有限非零整数序列给出。为了将编码变成对所考虑的基本波在射线起点和交接面上(复块体边界)的所有入射点上的特征说明，应当准备一个在这里称为CODE的程序。

5. 完全射线追踪

5.1 理　论

完全射线追踪包括：(a)射线追踪和沿射线的走时计算；(b)沿射线的极性矢量的确定；(c)动力学射线追踪(即射线传播矩阵

的计算)；(d)矢量复值折合幅度的确定。

5.1.1 射线追踪和走时计算

射线追踪是一条射线的计算，即逐步计算这条射线上各点的坐标。射线用一独立变量进行参数化

$$\sigma=\sigma_0+\int_{\tau_0}^{\tau} v^{\mathrm{NEXPS}}\mathrm{d}\tau=\sigma_0+\int_{s_0}^{s} v^{\mathrm{NEXPS}-1}\mathrm{d}s \tag{5.1}$$

其中τ是走时；s是沿着射线的弧长；v是相应波型的速度。整指数NEXPS可以由用户给定，NEXPS=0，±1，±2，…。射线追踪系统形式上是由六个一阶常微分方程组成的方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}&=v^{2-\mathrm{NEXPS}}G^{ij}p_j,\\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\sigma}&=v^{2-\mathrm{NEXPS}}\left(-v^{-3}\frac{\partial v}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}G^{jl}p_kp_l\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

这里x^i是射线上一点的坐标；p_i是x^i点上慢度矢量的协变分量，$p_i=\partial\tau/\partial x^i$。关于量度张量$G^{ij}$和Christoffel 符号$\Gamma^k_{ij}$可参考第2节，在一交接面上，用Snell定律进行射线变换。

由式(5.1)得到的实值走时公式有

$$\tau=\tau_0+\int_{\sigma_0}^{\sigma} v^{-\mathrm{NEXPS}}\mathrm{d}\sigma \tag{5.3}$$

复值走时的虚部定义为

$$\tau^{\mathrm{IM}}=\frac{1}{2}t^*=\int_{\tau_0}^{\tau}(2Q)^{-1}\mathrm{d}\tau=\int_{\sigma_0}^{\sigma}(2Q)^{-1}v^{-\mathrm{NEXPS}}\mathrm{d}\sigma \tag{5.4}$$

其中Q是有关的品质因子。

5.1.2 极性矢量

用Ω代表一条任意选择的射线。有几个理由可认为沿着射线Ω对极性矢量的确定，在完全射线追踪中起着重要的作用。如果要确定沿Ω传播波的位移矢量的方向，特别在S波情况，则必须知道极性矢量。进一步，极性矢量形成了与Ω相联的射线中心坐标系矢量基。射线中心坐标系在许多应用中是非常有用的，特别在动力学射线追踪中(第5.1.3节)。

正交射线中心坐标系是由Popov和Pšenčik(1978a, b)引进到地震学中的。用(q^1, q^2, $q^3=s$)代表射线中心坐标系，其中s是沿射线Ω的弧长，q^K是射线Ω上相距原点$s=q^3$处波前切平面上的直角坐标。射线中心坐标系的矢量基包括三个单位矢量$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$(极性矢量)，其中$\mathbf{e}_3$与射线Ω相切，$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$垂直于Ω。它们是以使射线中心坐标系正交的方式引入。对于射线中心基矢量$\mathbf{e}_j$的协变分量H_{ij}，存在有方程

$$\frac{\mathrm{d}H_{ij}}{\mathrm{d}\sigma}=v^{1-\mathrm{NEXPS}}\left[\frac{\partial v}{\partial x^k}G^{kl}H_{lj}p_i-p_kG^{kl}H_{lj}\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial v}{\partial x^i}+v\Gamma^m_{ik}G^{kl}p_lH_{mj}\right] \tag{5.5}$$

其中$(e_j)_i=H_{ij}$，当矢量$\mathbf{e}_j$垂直于Ω时，简化成

$$\frac{\mathrm{d}H_{ij}}{\mathrm{d}\sigma}=v^{1-\mathrm{NEXPS}}\left[\frac{\partial v}{\partial x^k}G^{kl}H_{lj}p_i+v\Gamma^m_{ik}G^{kl}p_lH_{mj}\right] \tag{5.6}$$

对切于射线Ω的单位矢量$\mathbf{e}_3$(式(5.5)中$j=3$)，有

$$H_{i3}=vp_i=G_{ij}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \tag{5.7}$$

并且式(5.5)等效于射线追踪系统式(5.2)中的第二个方程。只要计算矢量$\mathbf{e}_1$的协变分量H_{i1}($i=1$, 2, 3)就足够了，因为，当射线追踪式(5.2)完成时，$\mathbf{e}_3$由式(5.7)确定，且$\mathbf{e}_2$总是垂直于$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_3$，即

$$H_{i2}=\varepsilon_{ijk}G^{jm}H_{m3}G^{kn}H_{n1}[\det(G^{rs})]^{-1/2} \tag{5.8}$$

这里$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1$，$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=-1$，另外$ijk$的组合有$\varepsilon_{ijk}=0$。在交接面上，射线中心坐标系是绕垂直于入射平面的矢量按如下方式转动，即转动之后，矢量$\mathbf{e}_3$与被考虑的生成波的射线的切线一致。

5.1.3 动力学射线追踪和射线传播矩阵

动力学射线追踪是四个一阶线性微分方程组沿射线Ω的解，即求解有4×1列矩阵W分量的方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{W}}{\mathrm{d}\sigma}=v^{2-\mathrm{NEXPS}}\mathbf{SW} \tag{5.9}$$

其中

$$S=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -v^{-3}V & 0 \end{bmatrix}$$

0是零矩阵，I是2×2的单位矩阵及V是2×2矩阵，它的分量是

$$V_{IJ}=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^k \partial x^l}-\Gamma^m_{kl}\frac{\partial v}{\partial x^m}\right)G^{kr}G^{ls}H_{rI}H_{sJ} \quad (5.10)$$

W的前面两个分量是一条旁轴射线的射线中心坐标(q^1，q^2)(在Taylor展开中取一阶项)，而W的另外两个分量是旁轴射线慢度矢量的相应射线中心分量。

动力学射线追踪系统式(5.9)有四个线性独立解。用$\Pi(\sigma,\sigma_0)$代表射线在初始点$\sigma=\sigma_0$具有初始条件

$$\Pi(\sigma_0,\sigma_0)=I$$

方程式(5.9)的线性独立解的基本4×4矩阵，这里I是4×4单位矩阵。基本矩阵$\Pi(\sigma,\sigma_0)$也称射线传播矩阵，或者称动力学射线追踪系统的传播矩阵。它沿着射线满足下列关系。

$$\Pi^T\Sigma\Pi=\Sigma$$

及

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

这是所谓Π的对耦性质。动力学射线追踪系统式(5.9)的任何解$W(\sigma)$能表示为

$$W(\sigma)=\Pi(\sigma,\sigma_0)W(\sigma_0) \quad (5.12)$$

动力学射线追踪系统式(5.9)的解在地震学中有许多应用。假定所计算的射线属于由射线参数γ^1,γ^2参数化了的射线两参数系统。这样，动力学射线追踪系统能用来确定沿着射线的2×2矩阵Q^R和P^k，它们的元素有

$$
\left.\begin{aligned}
Q^{R}_{IJ} &= \left[\frac{\partial q^{I}}{\partial \gamma^{J}}\right]_{q^1=q^2=0} \\
P^{R}_{IJ} &= \left[\frac{\partial^{2}\tau}{\partial q^{I}\partial \gamma^{J}}\right]_{q^1=q^2=0} = \left[\frac{\partial p^{(q)}_{I}}{\partial \gamma^{J}}\right]_{q^1=q^2=0}
\end{aligned}\right\} \tag{5.13}
$$

这里q^I是由射线参数γ^1，γ^2给定的一条旁轴射线的射线中心坐标；$p^{(q)}_I$是旁轴射线慢度矢量的有关射线中心分量，$p^{(q)}_I=\partial\tau/\partial q^I$。矩阵$\mathbf{Q}^R$也称为几何扩散矩阵，$|\det\mathbf{Q}^R|$是几何扩散。它是度量射线管的膨胀和收缩。几何扩散与射线参数化有关。

引进射线坐标系(γ^1, γ^2, γ^3)，其中γ^1和γ^2是射线参数，γ^3是沿着射线的参数(例如弧长s)。因而矩阵$\mathbf{Q}^R$也可以解释为沿着射线Ω，由射线坐标(γ^1, γ^2)转换到射线中心坐标(q^1, q^2)的转换矩阵。同样，矩阵$\mathbf{P}^R$代表从射线坐标(γ^1, γ^2)转换到"相空间"坐标$p^{(q)}_1$, $p^{(q)}_2$的转换矩阵。4×2矩阵$\mathbf{X}^R$定义为

$$
\mathbf{X}^R=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}^R\\ \mathbf{P}^R\end{bmatrix} \tag{5.14}
$$

它沿着射线Ω满足动力学射线追踪系统

$$
\frac{d\mathbf{X}^R}{d\sigma}=v^{2-\mathrm{NEXPS}}\mathbf{S}\mathbf{X}^R \tag{5.15}
$$

式(5.15)的解可以表示为

$$
\mathbf{X}^R(\sigma)=\Pi(\sigma,\sigma_0)\mathbf{X}^R(\sigma_0) \tag{5.16}
$$

如果已知$\mathbf{Q}^R$和$\mathbf{P}^R$，就能确定走时场二阶导数的2×2矩阵$\mathbf{M}^R(\sigma)$，它有元素

$$
M^{R}_{IJ}=\left[\frac{\partial^{2}\tau}{\partial q^{I}\partial q^{J}}\right]_{q^1=q^2=0} \tag{5.17}
$$

$\mathbf{Q}^R$，$\mathbf{P}^R$和$\mathbf{M}^R$构成如下关系

$$
\mathbf{M}^R=\mathbf{P}^R(\mathbf{Q}^R)^{-1} \tag{5.18}
$$

动力学射线追踪系统的解，经过交接面的转换，由旁轴射线的Snell定律确定。

5.1.4 矢量性折合幅度

矢量性折合幅度

$$A_i = A_i^R(\rho v|\det Q^R|)^{1/2} \tag{5.19}$$

是由射线中心坐标系表示的复值矢量性位移的射线幅度 A_i^R(包括由于焦散引起的相移)乘上阻抗（密度ρ和速度v的乘积）和几何扩散$|\det Q^R|$的平方根。矢量性折合幅度A_i在射线初始点假定为一个单位。如果初始点设置在自由表面或内部任何交接面上，则转换系数可包含在A_i中。

定义3×3矩阵A_{ij}由矢量性折合幅度A_{i1}、A_{i2}、A_{i3}构成。A_{i1}相当于在射线初始点矢量e_1方向上极化的S波；A_{i2}相当于在初始点矢量e_2方向上极化的S波；A_{i3}相当于在初始点上的P波。矢量性折合幅度A_{ij}用射线中心坐标系表示。它们在单独块体内沿着射线元，除了焦散点外，都是常数，而在焦散点上，则要根据焦散类型，必须乘上$-i$或-1。在交接面上，矢量性折合幅度用折合反射/折射(R/T)系数来变换

$$R^E = R\left[\frac{\tilde{\rho}\tilde{v}|\cos\tilde{\alpha}|}{\rho v|\cos\alpha|}\right]^{1/2} \tag{5.20}$$

其中R是平面波位移反射/折射系数。这里带有"～"号的量，相当于有关的R/T波，而不带"～"号的量，则相当于入射波；这些量都是入射点的量。α和$\tilde{\alpha}$分别为入射角和反射/折射角。

5.2 沿射线要计算的量

5.2.1 沿射线要计算的基本量

完成完全射线追踪，计算沿射线在所选择点上的下列基本量：

$Y(1) = \tau$ 走时；

$Y(2) = \tau^{1M} = \frac{1}{2}t^*$ 复值走时的虚部；

$\left.\begin{array}{l} Y(3) = x^1 \\ Y(4) = x^2 \\ Y(5) = x^3 \end{array}\right\}$ 射线上各点的坐标；

$Y(6)=p_1$, $Y(7)=p_2$, $Y(8)=p_3$ 慢度矢量的协变分量；

$Y(9)=H_{11}$, $Y(10)=H_{21}$, $Y(11)=H_{31}$ 极性矢量e_1的协变分量，对于$J=1$情况，见式(5.6)；

$$
\begin{bmatrix} Y(12) & Y(16) & Y(20) & Y(24) \\ Y(13) & Y(17) & Y(21) & Y(25) \\ Y(14) & Y(18) & Y(22) & Y(26) \\ Y(15) & Y(19) & Y(23) & Y(27) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{43} & \Pi_{44} \end{bmatrix}
$$

动力学射线追踪系统式(5.9)的基本解矩阵(射线传播矩阵)；

Y(28)，…，Y(NY)，其中NY=27+NAMPL。

代表复值矢量性折合幅度的实量有NAMPL个。矢量性折合幅度用射线中心坐标系给定。NAMPL在如下不同情况中，可以是2，4，8；

(a_1) 在射线初始点上的P波情况，及在射线所讨论的点上的P波情况，这时NAMPL=2及$Y(28)=\mathrm{Re}A_{33}$，$Y(29)=\mathrm{Im}A_{33}$。

(a_2) 在射线初始点上的P波情况，及在射线所讨论的点上的S波情况，这时NAMPL=4及

$$Y(28)=\mathrm{Re}A_{13},\ Y(29)=\mathrm{Im}A_{13},$$
$$Y(30)=\mathrm{Re}A_{23},\ Y(31)=\mathrm{Im}A_{23}。$$

(b_1) 在射线初始点上的S波情况，及在射线所讨论的点上的P波情况，这时NAMPL=4及

$$Y(28)=\mathrm{Re}A_{31},\ Y(29)=\mathrm{Im}A_{31},$$
$$Y(30)=\mathrm{Re}A_{32},\ Y(31)=\mathrm{Im}A_{32}。$$

(b_2) 在射线初始点上的S波情况，及在射线所讨论的点上的S波情况，这时NAMPL=8及

$$Y(28)=\mathrm{Re}A_{11},\ Y(29)=\mathrm{Im}A_{11},$$

$Y(30)=\text{Re}A_{21}$, $Y(31)=\text{Im}A_{21}$,

$Y(32)=\text{Re}A_{12}$, $Y(33)=\text{Im}A_{12}$,

$Y(34)=\text{Re}A_{22}$, $Y(35)=\text{Im}A_{22}$。

5.2.2 沿射线要计算的辅助量

仅知道射线Ω上一点的上述的基本量，要继续从这点进行完全射线追踪还是不充分的。在本节中，将引进一些在完全射线追踪中是必要的或者是有用的量，以及包含有射线追踪某种讯息的一些量。

YY(1)＝σ 沿射线的独立变量。

YY(2)＝UEBRAY 射线追踪的误差上限，它等于射线初始点上输入值UEB（第5.6j节）。当数值积分要求多于初始阶段STEP的NHLF平分时，这值常常取两倍(第5.6g节)。在射线端点上，UEBRAY>UEB表示被降低的计算精度。

YY(3)＝ERRPP

YY(4)＝ERRPH 由于正交性条件（第5.8.2d和第5.8.3i

YY(5)＝ERRHH

节)，射线中心坐标系的两个计算的基矢量的偏差（绝对值)沿着射线累积。它们中的任何一个都可与在射线端点上的相应给定极限UEBPP，UEBPH或UEBHH进行比较(第5.6k节)。

IY(1)＝NY＝27＋NAMPL 说明一条射线上点的基本量的数目(第5.2.1节)

IY(2)＝KODIND 相当于所讨论的射线元在编码中的位置。它的数值由子程序CODE确定(第4节)。

IY(3)＝ICB0 这样一块复块体的控制变量，即射线从这一块出发进入含有要计算射线元的下一个块体；离开射线初始点所在的块体之前IY(3)＝0。

IY(4)＝ISB1 含有要计算射线元的简单块体的控制变量。

IY(5)＝ICB1 含有要计算射线元复块体的控制变量，对P波加＋号，而S波加－号。

IY(6)＝ISRF 要计算的射线元端点所在曲面的控制变量，复块体内边未定义，仅在射线元的端点有定义。

IY(7)＝ISB2 从曲面 ISRF 另一侧，在要计算的射线元端点上接触复块体ICB1的简单块体的控制变量；ISB2＝0 为对于ISRF另一侧的自由空间情况；复块体内边未定义，仅在射线元端点有定义。

IY(8)＝ICB2 在要计算的射线元端点上，从曲面ISRF另一侧接触复块体ICB1的复块体的控制变量；ICB2＝0为ISRF另一侧是自由空间情况；复块体里边未定义，仅在射线元端点上有定义。

IY(9)＝IFCT 沿射线要计算的部分，计算常微分方程右边的子程序FCT的调用数。

IY(10)＝IOUTP 沿射线数值积分完成的阶段数。

IY(11)＝ITRANS 在交接面上的变换数。

IY(12)＝KMAH 沿射线的焦散点数（射线轨迹的控制变量）。

5.2.3 确认焦散的量

计算折合矢量性幅度要求知道被计算射线上的焦散位置。焦散位置不是单独射线的特性，而是射线场的特征。它与旁轴射线相对于要计算射线的相互位置有关。如果在要计算射线的初始点$\sigma=\sigma_0$上，已知走时场二阶导数的2×2矩阵

$$\mathbf{M}^{INIT}=\mathbf{M}^{R}(\sigma_0)$$

则相互位置就能确定。矩阵$\mathbf{M}^{INIT}$可以用矩阵$\mathbf{Q}^{INIT}=\mathbf{Q}^{R}(\sigma_0)$和$\mathbf{P}^{INIT}=\mathbf{P}^{R}(\sigma_0)$给定（第3.1.3节），如

$$\mathbf{M}^{INIT}=\mathbf{P}^{INIT}(\mathbf{Q}^{INIT})^{-1}$$

5.3 辅助曲面

除了构成结构交接面和第3节叙述过的曲面1，…，NSRFC外，当进行完全射线追踪时，某些另外（辅助的）曲面可能是有用的。这些曲面可以用来限制完全射线追踪的计算容积（第5.4节）

或贮存计算的量(第5.5节)。

注意，计算容积可以做为所讨论模型M的子容积引进。因而实际计算仅仅在计算容积中进行，而不是在整个M中，并且在计算容积的边界上终止。这样，显著地提高了在模型M的各个区域中进行计算的效率。

辅助表面用整数从NSRFC+1到NSRFC+NSRFCA作控制变量标记，NSRFCA是辅助曲面数。辅助曲面可以用构成结构交接面上的曲面的同样方法来描述，程序SRFC1可以用来读入数据和准备必要的系数，而且可以用程序SRFC2来估算。

辅助曲面由它们的数NSRFCA、输入资料(在子程序SRFC1读入)及程序SRFC2给定。

5.4 追踪射线的终止

射线Ω的计算在下列情况下终止：

(a) 计算过的射线满足全部编码，即最后计算过的射线元相当于编码中的最后元素。

(b) 在交接面的入射点上，射线不能继续满足编码。例如(i)入射点可能位于不同编码所给出的表面上；(ii)编码所要求的下一个射线元位于不与入射点相接触的块体中（例如，编码可能要求在入射点处折射到某一不与含有入射射线块体相接触的块体中）；(iii)编码可能要求在自由表面的折射；(iv)所要求的反射或折射波的射线可能不是实值(例如，过临界折射)；(v)编码可能要求液相块体中的S波。

(c) 由编码求在交接面假想部分上的反射或类型转换。在这种情况，反射波和转换波的幅度为零。在原理上，每一个零反射/折射系数可能是射线计算终止的一个理由。

(d) 走时Y(1)大于给定的时间极限。

(e) 射线相交于限制完全射线追踪计算容积的六个坐标平面($x^i=x^i_{MIN}, x^i=x^i_{MAX}$)中的任何一个。计算容积不应超过模型定

义的容积M(第3.1节)。注意，除了六个坐标平面外，辅助曲面或模型曲面也可以用来限制计算容积；见(f)。

(f) 射线相交于限制完全射线追踪计算容积所给出的曲面系列F_{END}中的任何一个曲面。这些曲面既可以是构成结构交接面的曲面(第3节)，也可以是在第5.3节中引入的辅助曲面。如果F_{END}给定曲面的控制变量，及子程序SRFC2被激活，则这组F_{END}曲面也就确定。

5.5 计算量贮存

沿着射线计算过的及在第5.2节叙述过的量可以贮存在某些文件中。

5.5.1 沿射线量的贮存

沿着整个计算过射线的量，以独立变量的常数步长STORE贮存起来。在射线与交接面相交点上的量也贮存起来。它们可以在画射线图时使用。

5.5.2 给定曲面上量的贮存

在射线与给定的F_{STORE}系列曲面上任何一个交点上的量要贮存起来。这些曲面可以是如下：

(a) 构成结构交接面的曲面1,…,NSRFC。只贮存沿着形成复块体边界曲面那些部分的一些量。因为，通过交接面的这些量是不连续的，因而对每一曲面，必须给定正侧或负侧，在两侧上的量将要被贮存起来。代表正侧或负侧的符号可以引入在曲面的控制变量中。

(b) 辅助曲面NSRFC+1,…,NSRFC+NSRFCA。贮存沿着全部曲面上的量。没有理由要区分它们的正侧和负侧。

(c) 计算容积的边界。形成计算容积边界的坐标面(曲面)可以作控制变量的标记如下：对于$x^1-x^1_{MIN}=0$，101；对于$x^1-x^1_{MAX}=0$，102；对于$x^2-x^2_{MIN}=0$，103；对于$x^2-x^2_{MAX}=0$，104；对于$x^3-x^3_{MIN}=0$，105；对于$x^3-x^3_{MAX}=0$，106。

(d) 等时线 $\tau-\tau_{MAX}=0$。等时线可以用107作控制变量标记。

为了确定贮存曲面，必须给定形成 F_{STORE} 系列曲面的控制变量，而且子程序SRFC2必须对计算描述特有曲面的函数$f(x^i)$有效。记住，构成交接面的曲面控制变量必须用代表将要贮存量的曲面侧边的±号来补充。

用于贮存的每一曲面应当有其带贮存量的文件。

5.5.3 基本波射线终点上量的贮存

每一种基本波用它的编码给予定义(第4节)。编码的左边部分通常定义一些较为简单的基本波，这些基本波具有较少的射线元。可以把这些较简单基本波的量贮存在射线终点上。这些量可以用在计算另外的、具有较长元素链，但有相同的初始元素的基本波。计算可以从贮存的量开始，而不要重复计算初始元。

5.5.4 贮存量表

除了沿着射线计算过的和在第5.2节叙述过的一些量外，还有一些表明沿着射线在所讨论点上的模型地方性质的量，在完全射线追踪结果的进一步处理中可能是有用的。在完全射线追踪过程中，这些计算过的量，从原理上说，如需要的话，还可以再次计算。但这样可能颇为费时。因而，将这些量与沿射线计算过的量一起贮存起来，这是合理的。将要贮存的附加(地方的)量是：

ICB1 点所在复块体的控制变量，包括对P波为+号，或对S波为-号；

YL(1) $=v_P$ 点上P波速度；

YL(2) $=v_S$ 点上S波速度；

YL(3) $=\rho$ 点上密度；

$$\left.\begin{aligned}&\text{YL}(4)=v_1=\partial v/\partial x^1\\&\text{YL}(5)=v_2=\partial v/\partial x^2\\&\text{YL}(6)=v_3=\partial v/\partial x^3\end{aligned}\right\}\text{在一般坐标系中的速度导数。}$$

在这些地方量之后，要贮存在第5.2节说过的一些量Y(1)，…，

Y(NY)。

如果在射线与一个给定曲面的交点上的一些量被贮存起来，以及该曲面与块体间的交接面相同(即，此曲面属于构成交接面的NSRFC曲面系列)，则量ICB1，YL 和Y应当不只一次地贮存而且不论对三种波(入射、反射P波，反射S波)或对两种波(折射P波、折射S波)，都要贮存起来，这与它们要贮存的曲面侧边有关。

在某些应用中，用单独一套对应于入射波的量代替上述的三套或两套的量也可能是足够的。但在这种情况中，射线中心坐标系中的折合幅度Y(28),…,Y(NY)，应当由包括有相应的、以射线中心坐标表示的转换系数的折合幅度来代替。

(a) 初始点上的P波(6个实数)：

$$YC(1)=\mathrm{Re}A_{13},\quad YC(2)=\mathrm{Im}A_{13},$$
$$YC(3)=\mathrm{Re}A_{23},\quad YC(4)=\mathrm{Im}A_{23},$$
$$YC(5)=\mathrm{Re}A_{33},\quad YC(6)=\mathrm{Im}A_{33}。$$

(b) 初始点上的S波(12个实数)：

$$YC(1)=\mathrm{Re}A_{11},\quad YC(2)=\mathrm{Im}A_{11},$$
$$YC(3)=\mathrm{Re}A_{21},\quad YC(4)=\mathrm{Im}A_{21},$$
$$YC(5)=\mathrm{Re}A_{31},\quad YC(6)=\mathrm{Im}A_{31},$$
$$YC(7)=\mathrm{Re}A_{12},\quad YC(8)=\mathrm{Im}A_{12},$$
$$YC(9)=\mathrm{Re}A_{22},\quad YC(10)=\mathrm{Im}A_{22},$$
$$YC(11)=\mathrm{Re}A_{32},\quad YC(12)=\mathrm{Im}A_{32},$$

5.6 完全射线追踪数据

在本节中，总结完全射线追踪所需要的输入数据(除第2、3、4和6节讨论过的之外)。

(a) 坐标x^1_{MIN}，x^1_{MAX}，x^2_{MIN}，x^2_{MAX}，x^3_{MIN}，x^3_{MAX}给出限定计算容积的坐标平面和最大走时τ_{MAX}。坐标平面可以作控制变量标

记101，102，103，104，105，106。模型边界（第3.2.1节）可作为限定计算容积的坐标平面的补缺曲面。

(b) 辅助曲面数NSRFCA。曲面以正整数从NSRFC+1到NSRFC+NSRFCA顺序作控制变量标记。

(c) 最终曲面控制变量（模型或限定计算容积的辅助曲面，第5.4f节）。由数据(a)所表示的曲面不需要用这套控制变量给定，控制变量可以任意顺序给定。

(d) 贮存计算量的曲面控制变量(第5.5.2节)。控制变量可以任意顺序给定。构成结构交接面曲面的控制变量1,…,NSRFC应当包括一个+号或－号(第5.5.2a节)。

(e) 确定是否要考虑转换系数的整数KSTORE。

(f) 确定沿射线独立变量的指数NEXPS，见式(5.1)。

(g) 在数值积分过程中，独立变量初始增量分点的最大允许数NHLF。

(h) 为贮存沿射线计算量的独立变量步长STORE(第5.5.1节)。对于STORE=0，这些量不沿着射线贮存。

(i) 为了数值积分，独立变量的初始增量$\Delta\sigma$=STEP。

(j) 数值积分每一步中的走时误差上限UEB。沿射线各点坐标上的误差近似地变换成走时单位，且由UEB限定。如果UEB不要求大于初始增量STEP的分点数NHLF，则数值积分每一步中的误差自动地保持在UEB范围内。相反的情况，射线的其余的计算误差上限按2倍，4倍，8倍…增大。因而每条射线的计算是完善的。

(k) 由正交性条件得出的两种计算极性矢量的最大允许累积偏差UEBPP,UEBPH,UEBHH(第5.8.2d节和第5.8.3i节)。累积偏差(第5.2.2节中所定义的量YY(3)，YY(4)，YY(5))可与给定的极限UEBPP，UEBPH，UEBHH比较。最大累积偏差UEBPP，UEBPH，UEBHH以时间单位来表示。

(e) 由矩阵

$$\Sigma=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

确定的矩阵$\Pi^T\Sigma\Pi$的最大允许偏差UEBDRT见式(5.11)。任何分量的偏差均可与给定的极限UEBDRT作比较。

5.7 完全射线追踪

假定模型(第3节)、完全射线追踪的输入数据(第5.6节)及基本波编码(第4节)被给定。如果Y(1),…,Y(NY),YY(1),…,YY(5),IY(1),…,IY(12),Q_{AB}^{INIT}和P_{AB}^{INIT}(第5.2节)这些量都被给定，则给定的基本波射线的完全射线追踪可以由给定点Y(3),Y(4),Y(5)继续下去。

(a) 如果点位于复块体的内部，则射线计算像第5.8节所述那样继续下去，直到计算射线元的终点（射线元的终点不是射线终点(第5.4节)就是射线与复块体边界相交的交点)。

(b) 如果射线元的终点在复块体的边界上，于是有：若曲面控制变量IY(6)=ISRF在贮存计算量的输入数据中给定(第5.6d节)，则特征量(第5.5.4节)贮存在相应曲面的文件中。如果曲面是终止曲面(第5.6c节),则射线计算被终止(第5.4d—f节)，否则量Y(1),…,Y(NY),YY(1),…,YY(5),IY(1),…,IY(12)通过交接面时，必须作变换。基本波的编码给出了射线是折射还是反射，也给出了它必须继续为P波还是变为S波。通过交接面，这些量的变换叙述在第5.9节。注意，还有解释编码的子程序CODE(第4节)可以表示射线终点(第5.4a，b(i)—b(iii)等节)。同样，在交接面上变换的子程序(第5.9节)可以表示射线终点(第5.4b(iv)，b(v)，c等节)。变换之后，射线计算像在第5.8节中叙述的那样继续进行，一直到达计算射线元的终点。

为了让完全射线追踪在射线的起始点开始，量Y(1),…,

Y(NY), YY(1), …, YY(5), IY(1), …, IY(12), Q_{AB}^{INIT}和P_{AB}^{INIT}必须在射线起始点给定。在射线起始点上的上面这些量的给定将在第6节中讨论。

5.8 通过复块体的完全射线追踪

位于复块体ICB1内的射线元是用有27个方程的常微分方程组式(5.2)—(5.4)及$J=1$时的式(5.6)和式(5.9)的数值积分进行计算。IBM科学子程序包中的标准子程序HPCG或RKGS可以用来进行积分。在HPCG中，常微分方程组的解是用Hamming修改预测法——改正法进行计算的，它是四阶法。RKGS应用Runge-Kutta法(也是一种四阶法)。程序HPCG在每一步积分中，需要对方程组右边进行两个估算，而开始时要近似地取18个附加估算值。程序RKGS在每二步积分中，需要对方程组右边有11个估算值。因此，HPCG通常应当比PKGS更有效，但对于短射线元(高到四步数值积分)，可能RKGS更有效。

位于复块体内射线元的数值计算是由称为RAYCB的程序组织的(第5.8.1节)。

常微分方程组右边用SUBROUTINE FCT(X,Y,D)估算(第5.8.2节)。

在每一步数值积分成功地完成后，将在SUBROUTINE OUTP(X,Y,D,IHLF,NDIM,PRMT)中(第5.8.3节)进行必要的检验与辅助计算。

5.8.1 通过一个块体的完全射线追踪的简短叙述

子程序RAYCB将射线元起始点上所给定的量转换为射线元终点上的相应的量。

这些量是第5.2.1节中所说的Y(1),…,Y(NY)及第5.5.2节中所说的辅助量YY(1),…,YY(5),IY(1),…,IY(12)。辅助量IY(2)=KODIND和IY(3)=ICB0不是程序RAYCB所要求的，而量IY(6)=ISRF,IY(7)=ISB2及IY(8)=ICB2仅是输出参数。

射线元终点是射线与计算容积边界、或与复块体ICB1边界、或与终止曲面的下一个交点(第5.4节)。相交曲面的控制变量贮存在IY(6)=ISRF中。如果交在两个复块体之间的交接面上，这样，位于交接面另一侧的简单和复块体的控制变量贮存在IY(7)=ISB2和IY(8)=ICB2中。

量Y(1),…,Y(27)分别由如下子程序计算

SUBROUTINE HPCG (PRMT, Y, DERY, NDIM, IHLF, FCT, OUTP, AUX)

REAL PRMT(5), Y(NDIM), DERY(NDIM), AUX(16, NDIM)

INTEGER NDIM, IHLF

或由如下子程序计算

SUBROUTINE RKGS (PRMT, Y, DERY, NDIM, IHLF, FCT, OUTP, AUX)

REAL PRMT(5), Y(NDIM), DERY(NDIM), AUX(8, NDIM)

INTEGER NDIM, IHLF

FCT和OUTP在两种情况中都是外部子程序。

各个参数意义的详细说明在IBM科学子程序包中，这里不再重复。我们仅仅给定在我们的完全射线追踪情况中的这些参数。

常微分方程组右边由子程序FCT计算。在每一步完成之后，由HPCG(或RKGS)调用程序OUTP寻找计算射线元的终点，控制由于焦散所引起的折合幅度Y(28),…,Y(NY)的相移及将复块体内的计算量贮存在专门文件中。子程序RAYCB, FCT和OUTP之间的联系由局部公共块/RAYC/来完成。

程序RAYCB的结构与功能

(a) 输入辅助量(第5.2.2节)贮存在公共块/RAYC/中。

(b) 数值积分中独立变量S的间隔，由PRMT(1)=YY(1)扩展到充分大值（例如PRMT(2)=PRMT(1)+999999)。独立

变量的初始增量是 PRMT(3)$=\Delta\sigma=$STEP（第5.6节）。对于HPCG，误差上限是 PRMT(4)$=13.444\times$UEBRAY；对于RKGS，是PRMT(4)=UEBRAY。参数 PRMT(5)控制数值积分的终止，不需给定。误差权重可以像如下例子那样选择：

复值走时的实部和虚部

$$\text{DERY}(1)=1,\qquad \text{DERY}(2)=1$$

坐标

$$\text{DERY}(3)=\frac{(G_{11})^{1/2}}{v},\qquad \text{DERY}(4)=\frac{(G_{22})^{1/2}}{v}$$

$$\text{DERY}(5)=\frac{(G_{33})^{1/2}}{v}$$

慢度矢量的协变分量

$$\text{DERY}(6)=(G^{11})^{1/2}\Delta\sigma v^{1-\text{NEXPS}}$$

$$\text{DERY}(7)=(G^{22})^{1/2}\Delta\sigma v^{1-\text{NEXPS}}$$

$$\text{DERY}(8)=(G^{33})^{1/2}\Delta\sigma v^{1-\text{NEXPS}}$$

其他计算量

$$\text{DERY}(I)=0\qquad I=9,\cdots,27$$

相应波型的速度 v 及量度张量分量G^{ii}和G_{ii}取在数值积分的起点上，它们近似地代表沿计算的那部分射线的速度和量度张量值。注意，此时仅需要这些量的近似值；它们仅控制误差权重，而不是精确计算。

(c) 调用程序HPCG(或RKGS)。

(d) 在计算射线元的终点上，独立变量的值由公共块/RAYC/拷贝到变量YY(1)上。如果数值积分因为初始增量分点数太大而中断（大于NHLF，即，PRMT(5)<0，见第5.8.3j节），则误差上限UEBRAY被加倍，且算法重新由(b)继续。

(e) 辅助量(第5.2.2节)由公共块/RAYC/重新调用到特征数组上。

5.8.2 微分方程组的右边(子程序FCT)

在本节中，将叙述计算27个常微分方程右边部分 Y(1),…,Y(27)的算法；参见式(5.2)—(5.4)，及当 $J=1$ 时式(5.6)和式

(5.9)。假定算法由程序FCT通过下列步骤(a)—(g)实现。

(a) FCT引用次数IFCT(第5.2.2节)是按1递增的。

(b) 量度张量的分量 G^{ij} 和 Christoffel 符号 Γ^k_{ij} 用程序METRIC确定(第2.1节)。速度v、它的导数$\partial v/\partial x^i$和$\partial^2 v/\partial x^i \partial x^j$，及耗损因子$Q^{-1}$用程序VELOC确定(第3.3.2节)。

(c) 射线中心坐标系的基和某些有关的量按如下确定：

(i) 非单位矢量

$$p_i = Y(i+5), H_{i1} = Y(i+8)$$

(ii) 逆变分量

$$p^i = G^{ij}p_j,\quad H^{i1} = G^{ij}H_{j1}$$

(iii) 范数

$$d_{11} = (H^{i1}H_{i1})^{1/2},\qquad d_{33} = (p^i p_i)^{1/2},\qquad d_{13} = \frac{p^i H_{i1}}{d_{11}d_{33}}$$

(iv) 正交矢量

$$H_{i3} = \frac{p_i}{d_{33}},\qquad H^{i3} = \frac{p^i}{d_{33}}$$

$$H_{i1} = \frac{H_{i1}}{d_{11}} - H_{i3}d_{13},\qquad H^{i1} = \frac{H^{i1}}{d_{11}} - H^{i3}d_{13}$$

$$H_{i2} = (\det G^{rs})^{-1/2}\varepsilon_{ijk}H^{j3}H^{k1}, H^{i2} = G^{ij}H_{j2}$$

(d) 用于检验计算精度的一些量：对于正确解，上面引入的范数d_{11}, d_{33}, d_{13}应当是：$d_{11}=1$，$d_{33}=v^{-1}$，$d_{13}=0$。由正交性条件确定的射线中心坐标系基的偏差

$$\Delta_{11} = |d_{11}-1|,\qquad \Delta_{33} = |vd_{33}-1|,\qquad \Delta_{13} = |d_{13}|$$

贮存在公共块/RAYC/中，目的为了用程序OUTP将它沿着整条射线累积起来。这些累积起来的数值用于核对数值积分的精度。

(e) 射线中心坐标系中速度的一阶和二阶导数：

$$V_1 = \frac{\partial v}{\partial x^i}H^{i1},\qquad V_{AB} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial v}{\partial x^k}\right)H^{iA}H^{jB}$$

(f) 计算量的改正(即慢度矢量和初始极性矢量再归一化)：

$\mathrm{Y}(i+5)=H_{i3}/v$,　　$\mathrm{Y}(i+8)=H_{i1}$

(g) 微分方程组右边

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\sigma}=v^{-\mathrm{NEXPS}},\qquad \frac{\mathrm{d}\tau^{1\mathrm{M}}}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{1}{2}Q^{-1}v^{-\mathrm{NEXPS}}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\sigma}=H^{i3}v^{1-\mathrm{NEXPS}}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\sigma}=\left(-v^{-1}\frac{\partial v}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}H^{j3}H_{k3}\right)v^{-\mathrm{NEXPS}}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_{i1}}{\mathrm{d}\sigma}=(V_1H_{i3}+v\Gamma^k_{ij}H^{j3}H_{k1})v^{-\mathrm{NEXPS}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}\sigma}=v^{-1-\mathrm{NEXPS}}\begin{bmatrix}0 & 0 & v^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & v^3\\ -V_{11} & -V_{12} & 0 & 0\\ -V_{12} & -V_{22} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}\mathrm{Y}(12) & \mathrm{Y}(16) & \mathrm{Y}(20) & \mathrm{Y}(24)\\ \mathrm{Y}(13) & \mathrm{Y}(17) & \mathrm{Y}(21) & \mathrm{Y}(25)\\ \mathrm{Y}(14) & \mathrm{Y}(18) & \mathrm{Y}(22) & \mathrm{Y}(26)\\ \mathrm{Y}(15) & \mathrm{Y}(19) & \mathrm{Y}(23) & \mathrm{Y}(27)\end{bmatrix}$$

5.8.3 子程序OUTP

在数值积分完成任何一步以后，由HPCG(或RKGS)调用程序OUTP。它包括对射线新的计算点位置的各种检验，可能焦散点的检验等。如果需要的话，它还将计算量贮存在专门文件中。算法的详细说明如下。

(a) 贮存在变量X2和数组Y2(NY)，D2(NY)中的独立变量X、非独立变量Y和它们的导数D值，被移置进X1和数组Y1及D1中。子程序OUTP的参数X,Y,D的输入值被拷贝到X2和数组Y2,D2中。变量X2和数组Y2，D2集中放在公共块/RAYC/中，因为它们的值必须保留到OUTP的下一次引用。

在数值积分开始时[即如果独立变量X等于PRMT(1)]，返回到HPCG(或RKGS)。

(b) 射线的数值积分步数IY(10)＝IOUTP(第5.2.2节)以步长1递增。曲面控制变量IY(6)＝ISRF被设置等于零。

(c) 校核与计算容积边界坐标面相交。边界由7个实数表征(第5.6节)。如果7个限制中任何一个(变量控制由101到107)超过了，即，如果$f_{2i+99}=x^i-x^i_{MIN}$中任何一个小于或等于零，或$f_{2i+100}=x^i-x^i_{MAX}$大于或等于零，或$f_{107}=\tau-\tau_{MAX}$大于或等于零，则控制变量ISRF被设定等于由101到107有关的控制变量，且找到了交点。交点位于X1,Y1和X,Y之间的射线Ω上。独立变量X和非独立变量Y由交点上的值替代。交点可以用在第5.8.4节中叙述的方法找得。注意，函数$f_{101},\cdots,f_{107}$的梯度如下

$$\frac{\partial f_{2k+99}}{\partial x^i}=\frac{\partial f_{2k+100}}{\partial x^i}=\begin{cases}1 & \text{对于 } k=1,2,3 \quad i=k\\ 0 & \text{对于 } k=1,2,3 \quad i\neq k\end{cases}$$

$$\frac{\partial f_{107}}{\partial x^i}=p_i$$

(d) 校核与复块体边界相交。点X,Y所在的简单块体和复块体的控制变量可以引用子程序BLOCK得到(第3.3.1节)。如果射线还没有离开复块体IY(5)＝ICB1(即，如果复块体的控制变量等于ICB1)，则IY(4)＝ISB1的数值由现时的简单块体的控制变量所替代。相反情况(如果射线已经离开复块体ICB1)，则射线与复块体ICB1边界的交点必定如下求得。

(d_1) 将独立变量X拷贝到辅助变量XAUX中，同时将坐标Y(3),…Y(5)拷贝到辅助数组YAUX中。

(d_2) 设置IY(6)＝ISRF等于将点X,Y从简单块体ISB1中分出的曲面的控制变量。

(d_3) 射线与曲面ISRF的交点X,Y用第5.8.4节中所叙述的方法求得。调用子程序BLOCK来寻求在简单块体ISB1交点X,Y上、从曲面ISRF另一侧相接触的简单和复块体IY(7)＝ISB2和IY(8)＝ICB2。因而有三种可能性。

(i) 围成ISB1的曲面，将交点X,Y与简单块体ISB1隔开。

即点 X,Y 不在简单块体 ISB1 的边界上。算法必须由(d_2)开始重复。

(ii) 否则，如果邻近复块体ICB2等于ICB1，则点 X,Y 位于两个简单块体的边界上，但不在复块体ICB1的边界上。ISB1的值必须由ISB2替代，同时必须调用子程序BLOCK来寻求将点XAUX、YAUX与简单块体ISB1隔开的新曲面ISRF。算法必须从(d_3)重复。注意，交点将位于X1,Y1和 X=XAUX,Y=YAUX之间。

(iii) 否则，交点X,Y成功地求得。

(e) 校核与终曲面相交。完全射线追踪应该终止在其上的全部曲面，与构成交接面的1,…,NSRFC的曲面不同，必须要校核它们间相交。如果点X,Y在含有射线起始点的终止曲面的另一侧，则IY(6)=ISRF被设定等于曲面的控制变量，也就找到了交点。将这点上的数值贮存在变量X和数组Y中。

(f) 由于焦散引起的相移。几何扩散矩阵Q^R_{AB}是与射线起始点上的几何扩散矩阵Q^{INIT}_{AB}和它的导数P^{INIT}_{AB}有关(第 5.1.3 节和第5.2.3节)：

$$\begin{bmatrix} Q^R_{11} & Q^R_{12} \\ Q^R_{21} & Q^R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{INIT}_{11} & Q^{INIT}_{12} \\ Q^{INIT}_{21} & Q^{INIT}_{22} \\ P^{INIT}_{11} & P^{INIT}_{12} \\ P^{INIT}_{21} & P^{INIT}_{22} \end{bmatrix}$$

矩阵Q^{INIT}_{AB}和P^{INIT}_{AB}贮存在数组Y1中(第6.1节)。用下式代表在点X1,Y1上的几何扩散矩阵

$$\begin{bmatrix} Q^1_{11} & Q^1_{12} \\ Q^1_{21} & Q^1_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y1(12) & Y1(16) & Y1(20) & Y1(24) \\ Y1(13) & Y1(17) & Y1(21) & Y1(25) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} YI(12) & YI(16) \\ YI(13) & YI(17) \\ YI(14) & YI(18) \\ YI(15) & YI(19) \end{bmatrix}$$

同样地，用下式代表在X,Y上的几何扩散矩阵

$$\begin{bmatrix} Q^2_{11} & Q^2_{12} \\ Q^2_{21} & Q^2_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(12) & Y(16) & Y(20) & Y(24) \\ Y(13) & Y(17) & Y(21) & Y(25) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} YI(12) & YI(16) \\ YI(13) & YI(17) \\ YI(14) & YI(18) \\ YI(15) & YI(19) \end{pmatrix}$$

如果

$$\det Q^1 \det Q^2 < 0$$

则在点 X1,Y1 和点 X,Y 间有一个一阶焦散点(线焦散)，其中，$\det Q^1 = Q^1_{11}Q^1_{22} - Q^1_{12}Q^1_{21}$ 及 $\det Q^1 = Q^2_{11}Q^2_{22} - Q^2_{12}Q^2_{21}$。因而折合幅度Y(28),…Y(NY)必须乘上－i,且IY(12)＝KMAH以步度1增加。

另外，如果

$$(Q^1_{11}Q^2_{22} - Q^1_{12}Q^2_{21} + Q^1_{22}Q^2_{11} - Q^1_{21}Q^2_{12}) \det Q^1 < 0$$

则在点X1，Y1和点X，Y之间存在一个二阶焦散点(点焦散)。因而折合幅度Y(28),…，Y(NY)必须改变它们的符号，且 IY(12)＝KMAH以步度 2 增加。

(g) 在给定曲面上计算量的贮存。必须在为贮存计算量而给定的且不同于构成交接面的1,…,NSRFC曲面的所有曲面上，进行循环。如果一个曲面等同于射线元终点X,Y所在的曲面ISRF，则这点上的量贮存在相应的文件中 (第5.5.2节)。否则，如果点X,Y在点X1,Y1所在曲面的另一侧，则射线与这个曲面的交点即求得，且在这点上的独立变量与非独立变量暂时贮存在辅助变量XAUX 和辅助数组 YAUX 中。折合幅度 YAUX(28),…,YAUX(NY)由幅度Y(28),…,Y(NY)，加上由于点 X,Y 和点XAUX,YAUX之间的焦散而引起的相移来求得。用(f)中所说的同样方法，可以确定相移。记住，点XAUX,YAUX 的位置与从点 X,Y 出发的传播方向相反。因而因子 i 必须用来替代(f)中的－i。

(h) 沿着射线计算量的贮存。一些量以给定的步长STORE

(第5,6h节)，如果STORE≠0，沿着射线贮存在独立变量中。

$k_1 = \text{int}(X1/STORE)+1 \qquad k_2 = \text{int}(X/STORE)$

这些量贮存在由下列独立变量值给定的点中：

$$XAUX = k \times STORE (k = k_1, \cdots, k_2)$$

对于$k_1 > k_2$情况，数据不贮存。在点XAUX上的非独立变量YAUX(1),…,YAUX(27)，可以由点X1,Y1和点X2,Y2内插而得。内插法在第5.8.4节中叙述。折合幅度YAUX(28),…,YAUX(NY)可以用(g)中的同样方法求得。

(i) 为检验精度用的重归一化误差累积。贮存在公共块/RAYC/中的量 Δ_{33}，Δ_{13}和 Δ_{11}（第5.8.2d节）乘以$\frac{1}{2}(X-X1)$ v^{-NEXPS}，再加到量YY(3)=ERRPP,YY(4)=ERRPH,YY(5)=ERRHH中(第5.2.2节)，并暂时贮存在公共块/RAYC/中。

(j) 起始步的大的分点数。如果分点数IHLF大于给定极限NHLF，则设定PRMT(5)为负数而中断数值积分(PRMT(5)为非零时，数值积分中断)。

(k) 最后运算。独立变量值X贮存在公共块/RAYC/中。如果ISRF≠0(即，到这射线元的终点)，则数值积分由于设定PRMT(5)为正数而中断。

5.8.4 辅助方法

在程序OUTP中，需要对沿着射线的某些量进行内插，及找出射线与某些给定曲面的交点。本节叙述上述两问题的解法。

(a) 沿着射线内插

由数值积分得到的两结果点之间的射线部分，可以用该两点上的函数值和它们的一阶导数的三次法进行内插。用 x_1, y_1, y_1' (x_2, y_2, y_2')代表两个给定点中第一点(或第二点)上的独立变量、非独立变量和它们的导数。引进独立变量 x 的四个函数：

$$a_1(x) = [2a(x)+3]a(x)a(x)$$

$$a_2(x) = 1 - a_1(x)$$

$$b_1(x) = [a(x)+1]a(x)(x-x_2)$$

$$b_2(x)=[a(x)+1]a(x)(x-x_1)$$

其中

$$a(x)=(x-x_2)/(x_2-x_1)$$

它们有下列性质：

$$\begin{pmatrix} a_1(x_1) & a_1(x_2) & a_1'(x_1) & a_1'(x_2) \\ a_2(x_1) & a_2(x_2) & a_2'(x_1) & a_2'(x_2) \\ b_1(x_1) & b_1(x_2) & b_1'(x_1) & b_1'(x_2) \\ b_2(x_1) & b_2(x_2) & b_2'(x_1) & b_2'(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

这里函数$a_1'(x)$，$a_2'(x)$，$b_1'(x)$和$b_2'(x)$分别是函数$a_1(x)$，$a_1(x)$，$b_1(x)$和$b_2(x)$的一阶导数，即

$$a_1'(x)=6[a(x)+1]a(x)/(x_2-x_1)$$

$$a_2'(x)=-a_1'(x)$$

$$b_1'(x)=[3a(x)+2]a(x)$$

$$b_2'(x)=[3a(x)+1][a(x)+1]$$

于是，在x处非独立变量值和它们的导数由下式确定

$$y=a_1y_1+a_2y_2+b_1y_1'+b_2y_2'$$

$$y'=a_1'(y_1-y_2)+b_1'y_1'+b_2'y_2'$$

(b) 射线与给定曲面交点的寻求

只要射线两点XA，XB，有$f(x^i(XA))f(x^i(XB))<0$，就可以寻求由独立变量X进行参数化了的射线与曲面$f(x^i)=0$的交点。交点必定位于XA和XB之间。

射线要在使用(a)中所叙述的三次法由数值积分得到的两个最后点之间进行内插。如果曲面控制变量ISRF<100，则用子程序SRFC2计算函数$f(x^i)$。对于ISRF>100的情况，应用函数f_{101}，…，f_{107}。

交点能用组合二点法迭代求得。在每一奇次迭代时，用试位法，而每一偶次迭代时用Newton-Raphson法。因为Newton-Raphson法不需要收敛，所以在紧急情况下，由分点法代替。X的最后近似取为新的XB。不论旧的XA，XB中的哪一个，只要其上函

数$f(x^i)$和$f(x^i(X))$有相反符号关系，则取它为一个新的XA。如果独立变量的新间隔(XA,XB)充分小，有：

$$|XA-XB|\leqslant ERR$$

及

$$ERR \doteq UEB v^{-NEXPS}$$

则迭代就终止，其中 v 是相应波型的传播速度。

试位法迭代(老迭代)是这样：

$$X=(FA\times XB-FB\times XA)/(FA-FB)$$

其中

$$FA=f(x^i(XA)),\qquad FB=f(x^i(XB))$$

修改过的Newton-Raphson迭代(偶次迭代)是如下。

我们指出

$$XC=(XA+XB)/2$$

$$XCA=XA-FA/DA+(ERR/50)\text{sign}(XA-XB)$$

$$XCB=XB-FB/DB+(ERR/50)\text{sign}(XA-XB)$$

其中

$$DA=\frac{\partial f}{\partial x^k}(x^i(XA))\frac{\partial x^k}{\partial X}(XA)$$

$$DB=\frac{\partial f}{\partial x^k}(x^i(XB))\frac{\partial x^k}{\partial X}(XB)$$

如果XCA和XCB位于点XB和XC之间，则有

$$X=\begin{cases}XCA & |XCA-XB|<|XCB-XB|\\ XCB & |XCB-XB|\leqslant|XCA-XB|\end{cases}$$

如果仅仅只有XCA位于XB和XC之间，则有

$$X=XCA$$

如果仅仅只有XCB位于XB和XC之间，则有

$$X=XCB$$

如果既非XCA，又非XCB在XB和XC之间，则有

$$X=XC$$

5.9 通过弯曲交接面的完全射线追踪

沿着射线计算过的第5.2节中所定义的量 Y(1),…, Y(NY), YY(1),…,YY(5)和IY(1),…,IY(12),在交接面上必定要变换。分别用Y1,YY1,IY1和Y2,YY2,IY2代表在入射点上，相当于入射波和反射/折射波的一些量Y,YY,IY(第5.2节叙述过的)。用KODNEW代表编码中的新位置，及用|ICBNEW|代表生成波将要在里面传播的复块体中的控制变量。ICBNEW的符号给定了生成波的类型(P波为+，S波为-)。

5.9.1 辅助量、走时及坐标的变换

(a) 表明入射波折合幅度实值量的数目

$$NAMPL1=IY1(1)-27$$

(b) 确定生成波折合幅度实值量的数目NAMPL2

(b_1) 如果 IY1(5)>0 和 ICBNEW<0， 则NAMPL2=2NAMPL1;

(b_2) 如果 IY1(5)<0 和 ICBNEW>0， 则NAMPL2=NAMPL1/2;

(b_3) 其他情况，则NAMPL2=NAMPL1。

(c) 基本量输出数目IY2(1)=27+NAMPL2。

(d) 编码中的新位置IY2(2)=KODNEW。

(e) 简单块体和复块体的控制变量;

(e_1) 对于反射(|IY1(5)|=|ICBNEW|):IY2(3)=IY1(3), IY2(4)=IY1(4), IY2(5)=ICBNEW;

(e_2) 对于折射: IY2(3)=|IY1(5)|, IY2(4)=IY1(7), IY2(5)=ICBNEW。

(f) IY2(6), IY2(7), IY2(8)未有定义。

(g) IY2(9)=IY1(9), IY2(10)=IY1(10), IY2(11)=IY1(11)+1, IY2(12)=IY1(12)。

(h) 对于$I=1,\cdots,5$, 有YY2(I)=YY1(I)。

(i) 走时和坐标的实部与虚部保持不变：对于$I=1$，…，5，有Y2(I)＝Y1(I)。

5.9.2 量度张量和速度

在点x^i＝Y1(i＋2)上的量度张量的分量G_{ij}和G^{ij}及Christoffel 符号Γ^k_{ij}是程序METRIC的结果(第2.1节)。

引用子程序PARM2可得到入射波复块体参数|IY1(5)|。也同样可以得到在曲面IY1(6)另外一侧上的复块体IY1(8)的参数。引用程序VELOC可获得复块体|IY1(5)|中的速度VP1、VS1及入射波速度v和它的导数。同样，也可得到复块体IY1(8)中的速度VP2和VS2。在折射情况中，即|ICBNEW|＝IY1(8)，同样的引用可得出折射波速度$\bar{v}$与它的导数。在没有转换的反射情况中，即ICBNEW＝IY1(5)，可得到速度v和它的导数。在有转换的反射情况中，即 ICBNEW＝－IY1(5)，则必须再一次调用VELOC来给出反射波速度$\bar{v}$和它的导数。

如果反射/折射波的速度$\bar{v}$等于零(即液体中的S波)，则射线计算必须终止。

5.9.3 慢度矢量和极性矢量变换

入射波极性矢量(射线中心坐标系中的基矢量)由下式给定

$$H_{i3}=p_i(p_k G^{kl} p_l)^{-1/2}$$

其中

$$p_i=\text{Y1}(i+5)$$

是慢度矢量，及

$$H_{i1}=\text{Y1}(i+8)$$

定义由$f(x^i)=0$给定的曲面IY1(6)上的地方直角坐标系的基。曲面的单位法线是

$$Z_{i3}=f_i(f_k G^{kl} f_l)^{-1/2}$$

这里$f_i=\partial f/\partial x^i$，$f_{ij}=\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$。入射角$\alpha$($0\leqslant\alpha\leqslant\pi$)的余弦是

$$\cos\alpha=H_{i3}G^{ij}Z_{j3}$$

及正弦是

$$\sin\alpha=(1-\cos^2\alpha)^{1/2}$$

在入射平面上的基矢量是

$$Z_{i1}=(H_{i3}-Z_{i3}\cos\alpha)/\sin\alpha$$

及垂直于入射平面的基矢量是

$$Z_{i2}=\varepsilon_{ijk}Z_3^jZ_1^k(\det G_{rs})^{1/2}$$

其中 $Z_k^j=G^{jm}Z_{mk}$ 是基矢量的逆变分量，及$(\det G_{rs})^{1/2}$是程序METRIC的输出参数。在法向入射情况，即$\sin\alpha=0$，矢量Z_{i1}和Z_{i2}可任意选择（例如$Z_{i1}=H_{i1}$）。

入射/折射角$\tilde{\alpha}$的正弦可以用Snell定律计算

$$\sin\tilde{\alpha}=\frac{\tilde{v}}{v}\sin\alpha$$

余弦是

$$\cos\tilde{\alpha}=\pm\varepsilon(1-\sin^2\tilde{\alpha})^{1/2},\qquad \varepsilon=\mathrm{sign}(\cos\alpha)$$

其中折射情况（|ICBNEW|＝IY1(8)）取正号，反射情况，（|ICBNEW|＝|IY1(5)|）取负号。

矢量Z_{i2}相对于极化矢量H_{i2}的转角ψ由下式确定

$$\cos\psi=H_{i1}Z_1^i/\cos\alpha,\qquad \sin\psi=-H_{i1}Z_2^i$$

在入射平面上，垂直于反射/折射射线的单位矢量是

$$E_i=Z_{i1}\cos\tilde{\alpha}-Z_{i3}\sin\tilde{\alpha}$$

与反射/折射射线相切的单位矢量是

$$\tilde{H}_{i3}=Z_{i1}\sin\tilde{\alpha}+Z_{i3}\cos\tilde{\alpha}$$

希望矢量$\tilde{H}_{i2}$像矢量H_{i2}那样相对于矢量Z_{i2}转过同样角度ψ。这样

$$\mathrm{Y2}(i+8)=\tilde{H}_{i1}=E_i\cos\psi-Z_{i2}\sin\psi$$

反射/折射射线的慢度矢量是

$$\mathrm{Y2}(i+5)=\tilde{p}_i=\tilde{H}_{i3}/\tilde{v}$$

5.9.4 地方直角坐标系中的交接面曲率和速度梯度

表示地方坐标系中曲面IY1(6)的函数 $f(x^i)$的二阶导数除以$f(x^i)$的梯度范数是

$$D_{AB}=(f_{ij}-\Gamma_{ij}^kf_k)Z_A^iZ_B^j(f_rG^{rs}f_s)^{-1/2}$$

这个公式由将$f(x^i)$的二阶协变导数变换成地方直角坐标而得到。

地方直角坐标系中的速度梯度是

$$V_i=\frac{\partial v}{\partial x^j}Z_i^j,\qquad \widetilde{V}_i=\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x^j}Z_i^j$$

5.9.5 通过弯曲交接面的动力学射线追踪

首先将射线中心坐标系旋转角度 ψ:

$$Q_{A\beta}=\Psi_{AC}\Pi_{C\beta}=\Psi_{AC}\mathrm{Y1}(7+C+4\beta)$$

$$P_{A\beta}=\Psi_{AC}\Pi_{C+2,\beta}=\Psi_{AC}\mathrm{Y1}(9+C+4\beta)$$

其中

$$\Psi=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ -\sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}$$

因而变换公式是

$$\widetilde{Q}_{A\alpha}=\widetilde{C}_{AB}C_{BC}^{-1}Q_{C\alpha}$$

$$\widetilde{P}_{A\alpha}=\widetilde{C}_{AB}^{-1}C_{BC}P_{C\alpha}+\widetilde{C}_{AB}^{-1}F_{BC}C_{CD}^{-1}Q_{D\alpha},$$

其中

$$\mathrm{C}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \widetilde{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix}\cos\widetilde{\alpha} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

矩阵F_{AB}由下式给定

$$F_{AB}=(v^{-1}\cos\alpha-\widetilde{v}^{-1}\cos\widetilde{\alpha})D_{AB}+v^{-1}\sin\alpha(E_{AB}-\widetilde{E}_{AB})$$

其中

$$\mathrm{E}=\begin{bmatrix}-V_1v^{-1}(1+\cos^2\alpha)+V_3v^{-1}\sin\alpha\cos\alpha & -V_2v^{-1}\\ -V_2v^{-1} & 0\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}=\begin{bmatrix}-\widetilde{V}_1\widetilde{v}^{-1}(1+\cos^2\widetilde{\alpha})+\widetilde{V}_3\widetilde{v}^{-1}\sin\widetilde{\alpha}\cos\widetilde{\alpha} & -\widetilde{V}_2\widetilde{v}^{-1}\\ -\widetilde{V}_2\widetilde{v}^{-1} & 0\end{bmatrix}$$

最后，将射线中心坐标系转回$-\psi$角度，有

$$\mathrm{Y2}(7+A+4\beta)=\widetilde{\Pi}_{A\beta}=\Psi_{CA}Q_{C\beta}$$

$$\mathrm{Y2}(9+A+4\beta)=\widetilde{\Pi}_{A+2,\beta}=\Psi_{CA}P_{C\beta}$$

5.9.6 折合幅度的变换

在入射S波情况下，将射线中心坐标系转过角度ψ，有

$$\mathrm{Re}A_{Ai}=\Psi_{A1}Y1(28)+\Psi_{A2}Y1(30)$$

$$\mathrm{Im}A_{Ai}=\Psi_{A1}Y1(29)+\Psi_{A2}Y1(31)$$

对于$i=1$或3情况，及如果在射线起始点存在S波，则可能有

$$\mathrm{Re}A_{A2}=\Psi_{A1}Y1(32)+\Psi_{A2}Y1(34)$$

$$\mathrm{Im}A_{A2}=\Psi_{A1}Y1(33)+\Psi_{A2}Y1(35)$$

入射P波的折合幅度不要旋转，对于$i=1$或3情况，有

$$\mathrm{Re}A_{3i}=Y1(28),\qquad \mathrm{Im}A_{3i}=Y1(29)$$

及，可能有

$$\mathrm{Re}A_{32}=Y1(30),\qquad \mathrm{Im}A_{32}=Y1(31)$$

这样，上列折合幅度用如下公式中的一个进行变换：

$$\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{1i}\\ \widetilde{A}_{2i}\end{bmatrix}=\left(\frac{\widetilde{\rho}\widetilde{v}|\cos\widetilde{\alpha}|}{\rho v|\cos\alpha|}\right)^{1/2}\begin{bmatrix}R_{SV\to SV} & 0\\ 0 & R_{SH\to SH}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{1i}\\ A_{2i}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{1i}\\ \widetilde{A}_{2i}\end{bmatrix}=\left(\frac{\widetilde{\rho}\widetilde{v}|\cos\widetilde{\alpha}|}{\rho v|\cos\alpha|}\right)^{1/2}\begin{bmatrix}R_{P\to SV}\\ 0\end{bmatrix}A_{3i}$$

$$\widetilde{A}_{3i}=\left(\frac{\widetilde{\rho}\widetilde{v}|\cos\widetilde{\alpha}|}{\rho v|\cos\alpha|}\right)^{1/2}[R_{SV\to P}\quad 0]\begin{bmatrix}A_{1i}\\ A_{2i}\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}_{3i}=\left(\frac{\widetilde{\rho}\widetilde{v}|\cos\widetilde{\alpha}|}{\rho v|\cos\alpha|}\right)^{1/2}R_{P\to P}A_{3i}$$

其中$i=1,2$是对于射线起始点S波情况，而$i=3$是对于射线起始点P波情况。

生成P波的折合幅度可以直接贮存在输出数组Y2中，对于$i=1$或$i=3$情况，有

$$Y2(28)=\mathrm{Re}\widetilde{A}_{3i},\qquad Y2(29)=\mathrm{Im}\widetilde{A}_{3i}$$

及，对于射线起始点为S波情况，有

$$Y2(30)=\mathrm{Re}\widetilde{A}_{32},\qquad Y2(31)=\mathrm{Im}\widetilde{A}_{32}$$

对于S波，将射线中心坐标系转过$-\psi$角度，对于$i=1$或$i=3$，有

$$Y2(26+2A)=\Psi_{BA}\mathrm{Re}\widetilde{A}_{Bi},\qquad Y2(27+2A)=\Psi_{BA}\mathrm{Im}\widetilde{A}_{Bi}$$

及，对于射线起始点S波情况，有

$$Y2(30+2A)=\Psi_{BA}\mathrm{Re}\widetilde{A}_{B2},\qquad Y2(31+2A)=\Psi_{BA}\mathrm{Im}\widetilde{A}_{B2}$$

5.9.7 反射/折射系数

R/T(反射/折射)系数由如下表达式给定:

反射系数

$$R_{SV\to SV}=D^{-1}[q^2p^2P_1P_2P_3P_4+\rho_1\rho_2(\alpha_1\beta_2P_2P_3-\beta_1\alpha_2P_1P_4)$$
$$-\alpha_1\beta_1P_3P_4Y^2+\alpha_2\beta_2P_1P_2X^2-\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2p^2Z^2]$$

$$R_{P\to P}=D^{-1}[q^2p^2P_1P_2P_3P_4+\rho_1\rho_2(\beta_1\alpha_2P_1P_4-\alpha_1\beta_2P_2P_3)$$
$$-\alpha_1\beta_1P_3P_4Y^2+\alpha_2\beta_2P_1P_2X^2-\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2p^2Z^2]$$

$$R_{SV\to P}=-2\varepsilon\beta_1pP_2D^{-1}(qP_3P_4Y+\alpha_2\beta_2XZ)$$

$$R_{P\to SV}=2\varepsilon\alpha_1pP_1D^{-1}(qP_3P_4Y+\alpha_2\beta_2XZ)$$

$$R_{SH\to SH}=\overline{D}^{-1}(\rho_1\beta_1P_2-\rho_2\beta_2P_4)$$

折射系数

$$R_{SV\to SV}=2\beta_1\rho_1P_2D^{-1}(\alpha_1P_3Y+\alpha_2P_1X)$$

$$R_{P\to P}=2\alpha_1\rho_1P_1D^{-1}(\beta_2P_2X+\beta_1P_4Y)$$

$$R_{SV\to P}=2\varepsilon\beta_1\rho_1pP_2D^{-1}(qP_1P_4-\alpha_1\beta_2Z)$$

$$R_{P\to SV}=-2\varepsilon\alpha_1\rho_1pP_1D^{-1}(qP_2P_3-\beta_1\alpha_2Z)$$

$$R_{SH\to SH}=2\rho_1\beta_1P_2\overline{D}^{-1}$$

这里

$$D=q^2p^2P_1P_2P_3P_4+\rho_1\rho_2(\beta_1\alpha_2P_1P_4+\alpha_1\beta_2P_2P_3)$$
$$+\alpha_1\beta_1P_3P_4Y^2+\alpha_2\beta_2P_1P_2X^2+\alpha_1\alpha_2\beta_2\beta_1p^2Z^2$$

$$\overline{D}=\rho_1\beta_1P_2+\rho_1\beta_2P_4$$

$$q=2(\rho_1\beta_2^2-\rho_1\beta_1^2),\quad X=\rho_2-qp^2,\quad Y=\rho_1+qp^2,\quad Z=\rho_2-\rho_1-qp^2$$

$$P_1=(1-\alpha_1^2p^2)^{1/2},\quad P_2=(1-\beta_1^2p^2)^{1/2}$$

$$P_3=(1-\alpha_2^2p^2)^{1/2},\quad P_4=(1-\beta_2^2p^2)^{1/2}$$

平方根P_K对负自变量是正虚数，例如，当$p>1/\alpha_2$时，$P_3=i(\alpha_2^2p^2-1)^{1/2}$。量$p$是射线参数，$p=\sin\alpha/v$，其中$\alpha$是入射角，$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$(第5.9.3节)，$v$是在入射点入射波的速度。量$\alpha_1=$VP1，$\beta_1=$VS1及$\rho_1$相应于交接面含有入射波一侧的入射点上的量；而$\alpha_2=$VP2，$\beta_2=$VS2和$\rho_2$相应于交接面另一侧在相同点上的量。量$\varepsilon$由关系式$\varepsilon=\text{sign}(\cos\alpha)$给定(第5.9.3节)。进一步详细叙述见Červený

(1985a)。

对于液体-液体交接面，及反射情况，有

$$R_{P-P}=\frac{\rho_2\alpha_2P_1-\rho_1\alpha_1P_3}{\rho_2\alpha_2P_1+\rho_1\alpha_1P_3}$$

同时，对于折射情况，有

$$R_{P-P}=\frac{2\rho_1\alpha_1P_1}{\rho_2\alpha_2P_1+\rho_1\alpha_1P_3}$$

对于地球表面反射情况，即在上面表达式中，令 $\alpha_2=\beta_2=\rho_2=0$。

6. 射线的起始点

考虑一个给定的基本波射线的两参数系统。基本波的射线由它的两个参数γ^1和γ^2给定。要计算的射线可以从对所有射线共有的一个单一起始点开始，也可以从一起始曲面开始，沿此曲面的初始走时是给定的，也可以从一曲线开始，沿此曲线的初始走时是给定的，等等。

6.1 射线起始点上的一些重要量

在射线初始点上，在第5.5.4节中定义的，说明模型局部性质的一些量，如ICB1和YL(1),…,YL(6)，以及表明射线性质和走时场性质的一些量如下：

YI(1) 初始走时；

YI(2) 复走时的初始虚部；

YI(3),…,YI(5) 射线初始点的坐标；

YI(6),…,YI(8) 起始慢度矢量的协变分量；

YI(9),…,YI(11) 在射线起始点上，射线中心坐标系的第一基矢量[垂直于慢度矢量YI(6),…,YI(8)]的协变分量；

$$\begin{pmatrix} YI(12) & YI(16) \\ YI(13) & YI(17) \\ YI(14) & YI(18) \\ YI(15) & YI(19) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{INIT} & Q_{12}^{INIT} \\ Q_{21}^{INIT} & Q_{22}^{INIT} \\ P_{11}^{INIT} & P_{12}^{INIT} \\ P_{21}^{INIT} & P_{22}^{INIT} \end{pmatrix}$$ 几何扩散矩阵Q^{x}的

元素及在射线起始点上矩阵 P^{x}（第5.13节）；

YI(20)$=\bar{\gamma}^1$，YI(21)$=\bar{\gamma}^2$要计算射线的离源参数。

除了上述说明性质的一些量以外，这些性质是由一单条射线确定，还存在计算射线附近、说明射线离散系统性质的一些量。这些量中的一些如下：

YI(22)　相应射线的射线参数曲面元$\delta\Gamma$的面积Γ，

$$\Gamma=\int_{\delta\Gamma} d\gamma^1 d\gamma^2 \tag{6.1}$$

YI(23), YI(24), YI(25)　对称矩阵Γ_{KL}分量$\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}$，是按相应射线计算出的射线参数曲面元$\delta\Gamma$的比矩

$$\Gamma^{IJ}=\Gamma^{-1}\int_{\delta\Gamma}(\hat{\gamma}^I-\gamma^I)(\hat{\gamma}^J-\gamma^J)d\gamma^1 d\gamma^2 \tag{6.2}$$

的逆。这里γ^I是射线参数。

对应于射线初始点上的一些量ICB1，YL(1)，…，YL(6)及YI(1)，…，YI(21)，与另一些量YI(22)，…，YI(25)一起是在处理完全射线追踪结果中所要求的；它们必须贮存在某一文件中。量YI(22)，…，YI(25)在完全射线追踪过程中一般是不知道的；它们能在完全射线追踪之后确定。因而当完全射线追踪的结果贮存起来时，它们不能贮存，但在完全射线追踪已经完成之后，它们必须被贮存。由于这些理由，这些量YI(22)，…，YI(25)应当贮存在另一个文件中，而不是完全射线追踪结果贮存的文件中。似乎有理由将所有量ICB1，YL(1)，…YL(6)及相应于射线初始点上的YI(1)，…，YI(25)都贮存在一个单独的文件中。

含有射线起始点简单块体的控制变量ISB1及上面提到过的、定义在射线起始点上的量ICB1，YL(1)，…，YL(6)，YI(1)，…，

YI(21)，在完全射线追踪中可能是必要的，或是有用的。由此理由，它们应当贮存在一个公共块中。

6.2 完全射线追踪的起始值

沿着射线计算及第5.2.1节定义过的基本量Y(1)，…，Y(NY)的初始值，其中NY=27+NAMPL，是

$$Y(I)=YI(I) \qquad I=1,\cdots,11$$

$$\begin{pmatrix} Y(12) & Y(16) & Y(20) & Y(24) \\ Y(13) & Y(17) & Y(21) & Y(25) \\ Y(14) & Y(18) & Y(22) & Y(26) \\ Y(15) & Y(19) & Y(23) & Y(27) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

及

(a) 对于射线初始点上P波情况

$$NAMPL=2$$

$$Y(28)=1, \qquad Y(29)=0$$

(b) 对于射线初始点上S波情况

$$NAMPL=8$$

$$Y(28)=1, \quad Y(29)=0$$

$$Y(30)=0, \quad Y(31)=0$$

$$Y(32)=0, \quad Y(33)=0$$

$$Y(34)=1, \quad Y(35)=0$$

由第5.2.2节所定义过的一些辅助量的初始值是

$$YY(1)=0$$

$$YY(2)=UEB$$

这是在输入数据(第5.6节)中给定的值；

$$YY(3)=0, \qquad YY(4)=0, \qquad YY(5)=0,$$

$$IY(1)=27+NAMPL$$

其中NAMPL由上面给定；

$$IY(2)=0, \qquad IY(3)=0$$

$$IY(4)=ISB1$$

这里ISB1是射线起始点所在的简单块体的控制变量；

$$IY(5)=ICB1$$

这里ICB1是射线起始点所在的复块体的控制变量，它带有符号，P 波为+，S 波为-；

IY(6)　未定义　(如IY(6)=0)；

IY(7)　未定义　(如IY(7)=0)；

IY(8)　未定义　(如IY(8)=0)；

IY(9)=0　　IY(10)=0　　IY(11)=0　　IY(12)=0

7. 完全射线追踪结果的应用和处理

应用这里所叙述的完全射线追踪方法，确定和贮存沿着射线以及具有某些选择曲面的射线交点上的、地震学上重要的各种量。进而，附加的程序能用来修改和/或重要地推广用在这个方法中的起始条件和处理这些结果。用这种方法，完全射线追踪法在处理复三维侧向变化成层和块状结构中传播的高频地震体波的许多程序包中，能作为一个基本方法应用。在这一节中，将简要叙述几个这样的可能性。完全射线追踪除了在这节中所列出的那些应用外，在不久的将来，将会找到许多另外的重要地震学的应用。

这里用Ω代表计算射线，用O_O代表射线的起始点，及用O_S代表射线上另外的点。我们也将考虑点O_S附近的一点S，及O_O附近的一点 O(图7)。这些点的一般坐标分别用$x^i(O_O)$，$x^i(O_S)$，$x^i(S)$

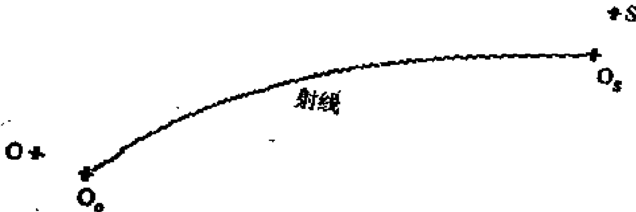


图 7

和x^i(O)表示。起始点O_o的坐标用初始条件给定，见第6.1节中YI(3),…,YI(5)，以及点O_S的坐标由完全射线追踪得到，见第5.2.1节中Y(3),…,Y(5)。

7.1 走时、虚走时

用$\tau_0=\tau(O_O)$表示初始走时，用$\tau^{IM}(O_O)$表示初始虚走时(即，复值走时中的虚部)。它们由初始条件中YI(1)和YI(2)给定(第6.1节)。由完全射线追踪，可得到$\tau(O_S)$，O_S点处所讨论波的到时及复值到时的虚部$\tau^{IM}(O_S)$，见第5.2.1节中的Y(1)和Y(2)。引进沿着射线Ω从O_O到O_S的走时$\tau(O_S, O_O)$和虚走时$\tau^{IM}(O_S, O_O)$，有关系

$$\left.\begin{aligned}&\tau(O_S,O_O)=\tau(O_S)-\tau(O_O)\\&\tau^{IM}(O_S,O_O)=\tfrac{1}{2}t^*(O_S,O_O)=\tau^{IM}(O_S)-\tau^{IM}(O_O)\end{aligned}\right\}\quad(7.1)$$

用$\frac{1}{2}t^*(O_S,O_O)$代替$\tau^{IM}(O_S,O_O)$，且称t^*为"t星号"。走时$\tau(O_S, O_O)$的重要性是显而易见的；量t^*在耗损介质中传播的波幅度计算中起重要的作用(第7.18节)。

7.2 慢度矢量、走时场的一阶偏导数

在起始点O_O，慢度矢量的协变分量$p_i(O_O)$是由YI(6),…,YI(8)给定(第6.1节)。在O_S点，它们是用完全射线追踪得到，见第5.2.1节中的Y(6),…,Y(8)。两种情况中，它们都代表走时场对一般坐标x^i的一阶偏导数：

$$p_i(O_O)=\left[\frac{\partial\tau(P)}{\partial x^i}\right]_{P=O_O},\qquad p_i(O_S)=\left[\frac{\partial\tau(P)}{\partial x^i}\right]_{P=O_S}\qquad(7.2)$$

因而$p_i(O_O)$能用在震中定位过程，以$-p_i(O_O)$代表走时$\tau(O_S, O_O)$相对于震源坐标O_O的偏导数。式(7.2)也能用在旁轴走时的计算中(第7.10节)。

由协变分量$p_i(O_O)$和$p_i(O_S)$，用如下关系能容易地得到逆

变分量

$$p^i(O_O)=G^{ik}(O_O)p_k(O_O), \qquad p^i(O_S)=G^{ik}(O_S)p_k(O_S) \tag{7.3}$$

7.3 射线中心坐标系的矢量基

射线中心坐标系的基矢量$e_1, e_2, e_3=t$（亦叫极性矢量）能很容易地从完全射线追踪所得到的量中计算出来。

单位矢量t是相切于射线，这样，由慢度矢量可立即得到它：

$$\left.\begin{aligned} t_i(O_O)&=v(O_O)p_i(O_O), \qquad t_i(O_S)=v(O_S)p_i(O_S) \\ t^i(O_O)&=v(O_O)p^i(O_O), \qquad t^i(O_S)=v(O_S)p^i(O_S) \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

三矢组$e_1, e_2, e_3=t$在射线上任何一点都是相互垂直的。满足这个性质的初始单位矢量$e_1(O_O)$和$e_2(O_O)$都可以任意地选择。

用$H^U_{ij}(O_O)$代表初始极性矢量$e_j(O_O)$的第i个协变分量，用$H^U_{ij}(O_S)$代表极性矢量$e_j(O_S)$的第i个协变分量。假定矢量H^U_{i3}垂直于波前。在本节中，初始极性矢量的下列选择为固有选择：

$$H^U_{ij}(O_O)=H_{ij}(O_O) \tag{7.5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &H_{i3}(O_O)=t_i(O_O) \\ &H_{i1}(O_O)=\mathrm{YI}(i+8) \\ &H_{i2}(O_O)=\varepsilon_{ijk}G^{jm}(O_O)H_{m3}(O_O)G^{kn}(O_O)H_{n1}(O_O) \\ &\qquad\times[\det G^{rs}(O_O)]^{-1/2} \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

极性矢量的固有选择隐含地用在这里提出的完全射线追踪过程中。初始极性矢量$e_j(O_O)$的任何一般选择$H^U_{ij}(O_O)$在这里将称作为用户选择。当然，矩阵$H^U_{ij}(O_O)$必须由用户给定；此时假定它是已知的。

在点O_S，极性矢量$e_j(O_S)$的协变分量$H^U_{ij}(O_S)$由如下关系给定：

$$H^U_{ij}(O_S)=H_{ik}(O_S)H_{mk}(O_O)G^{mn}(O_O)H^U_{nj}(O_O) \tag{7.7}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&H_{i3}(O_S)=t_i(O_S)\\
&H_{i1}(O_S)=Y(i+8)\\
&H_{i2}(O_S)=\varepsilon_{ijk}G^{jm}(O_S)H_{m3}(O_S)G^{kn}(O_S)H_{n1}(O_S)\\
&\qquad\times[\det G^{rs}(O_S)]^{-1/2}
\end{aligned}\right\}\quad(7.8)
$$

总结：对于O_O上初始极性矢量的任何用户选择，可用Y(6)，…，Y(11)和上面的关系式计算出O_S上的极性矢量。

对于初始极性矢量的固有选择式(7.5)情况，式(7.7)简化为

$$H_{ij}^{U}(O_S)=H_{ij}(O_S)\qquad(7.9)$$

注意，量H_{ij}^{U}代表由用户射线中心坐标系变换到一般坐标系时的3×3变换矩阵的元素。同样地，H_{ij}代表由固有射线中心坐标系变换到一般坐标系时的3×3变换矩阵元素。

由固有射线中心坐标系变换到用户射线中心坐标系时的3×3变换矩阵$\hat{H}^{UI}$

$$H_{jk}^{UI}=H_{mj}^{U}(O_O)G^{mn}(O_O)H_{nk}(O_O)\qquad(7.10)$$

沿着射线是常数。

7.4 射线传播矩阵

在O_S点上的4×4传播矩阵$\Pi(O_S,O_O)$的元素贮存在Y(12)，…，Y(27)中(第5.2.1节)。记住$\Pi(O_O,O_O)=I$，这里I是4×4单位矩阵(第6.2节)。射线传播矩阵由固有射线中心坐标系表示。

引进2×2实值矩阵$Q_1(O_S,O_O)$，$Q_2(O_S,O_O)$，$P_1(O_S,O_O)$及$P_2(O_S,O_O)$，并构成如下关系

$$\Pi(O_S,O_O)=\begin{bmatrix}Q_1(O_S,O_O) & Q_2(O_S,O_O)\\ P_1(O_S,O_O) & P_2(O_S,O_O)\end{bmatrix}\qquad(7.11)$$

这里$Q_1(O_S,O_O)$和$P_1(O_S,O_O)$是带有在O_O点为远场(平面波)初始条件的动力学射线追踪系统式(5.15)的矩阵解。同样地，$Q_2(O_S,O_O)$和$P_2(O_S,O_O)$相当于在O_O点是点源初始条件。

注意，射线传播矩阵的逆由下式给定：

$$\Pi(O_O,O_S)=\Pi^{-1}(O_S,O_O)=\begin{bmatrix} P_2^T(O_S,O_O) & -Q_2^T(O_S,O_O) \\ -P_1^T(O_S,O_O) & Q_1^T(O_S,O_O) \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

这关系得自式(5.11)。因而，用从O_O到O_S完全射线追踪的结果，也能确定从O_S到O_O的逆射线传播矩阵。

7.5 几何扩散矩阵Q

2×2几何扩散矩阵

$$Q_{AB}=\left[\frac{\partial q^A}{\partial \gamma^B}\right]_{q^1=q^2=0} \tag{7.13}$$

代表从射线坐标(γ^1,γ^2)变换到用户射线中心坐标(q^1,q^2)的变换矩阵。点O_S上几何扩散矩阵的一般关系是

$$Q(O_S)=H^{UI}\{Q_1(O_S,O_O)(H^{UI})^TQ(O_O)+Q_2(O_S,O_O)(H^{UI})^TP(O_O)\} \tag{7.14}$$

由射线坐标变换到慢度矢量的用户射线中心分量的变换矩阵P，是在第7.6节中给予定义。

式(7.14)不单对初始条件和射线Ω的完全射线追踪(第6节)之前给定的射线参数化有效，而且也对包含有射线Ω的任何射线系统，及射线任何参数化都有效。因此用符号Q替代Q^R，见式(5.13)。注意，从参数γ^A到参数$\bar{\gamma}^A$的变更(对于固定的射线系统)代表式(7.14)左边与右边都乘上一个2×2常数矩阵

$$C_{AB}=\frac{\partial \gamma^A}{\partial \bar{\gamma}^B} \tag{7.15}$$

考虑射线系统及射线Ω的完全追踪所给定的这系统的参数化(第6节)，可采用用户射线中心坐标系，计算射线初始点上的几何扩散矩阵，如

$$Q(O_O)=H^{UI}Q^{INIT} \tag{7.16}$$

其中2×2矩阵Q^{INIT}的分量贮存在YI(12)，YI(13)，YI(16)，YI(17)中。同样

$$P(O_O)=H^{UI}P^{INIT} \tag{7.17}$$

其中P^{INIT}贮存在YI(14)，YI(15)，YI(18)，YI(19)中(第6.1节)。于是式(7.14)有

$$Q(O_S)=H^{UI}\{Q_1(O_S,O_O)Q^{INIT}+Q_2(O_S,O_O)P^{INIT}\} \tag{7.18}$$

7.6 变换矩阵P

分量为

$$P_{AB}=\left[\frac{\partial p_A^{(q)}}{\partial \gamma^B}\right]_{q^1,q^2=0}$$

的2×2矩阵P代表由射线坐标(γ^1,γ^2)变换到慢度矢量的用户射线中心分量$p_1^{(q)}=\partial\tau/\partial q^1$，$p_2^{(q)}=\partial\tau/\partial q^2$时的变换矩阵。矩阵P的一般关系是

$$\begin{aligned}P(O_S)=H^{UI}\{&P_1(O_S,O_O)(H^{UI})^TQ(O_O)\\&+P_2(O_S,O_O)(H^{UI})^TP(O_O)\}\end{aligned} \tag{7.19}$$

对这个公式及各个量的意义的讨论类似于在第7.5节中的讨论。

对射线系统及沿着射线Ω进行完全射线追踪所给定的系统参数化，$Q(O_O)=H^{UI}Q^{INIT}$，$P(O_O)=H^{UI}P^{INIT}$(第7.5节)，式(7.19)得到

$$P(O_S)=H^{UI}\{P_1(O_S,O_O)Q^{INIT}+P_2(O_S,O_O)P^{INIT}\} \tag{7.20}$$

7.7 几何扩散

用几何扩散$J(O_S)$，可理解如下的量

$$J(O_S)=|\det Q(O_S)| \tag{7.21a}$$

如果已知几何扩散矩阵Q，则几何扩散就能计算。几何扩散与极性矢量$e_1(O_O)$和$e_2(O_O)$的初始方向无关。

对于O_O是点源情况，式(7.21a)得

$$J(O_S)=|\det Q_2(O_S,O_O)||\det P(O_O)| \tag{7.21b}$$

在射线幅度计算中，几何扩散是最重要的量：射线幅度反比于几何扩散的平方根。

7.8 走时场的二阶导数矩阵

走时场相对于用户射线中心坐标(q^1, q^2)的二阶导数的2×2矩阵M的元素，$M_{JK}=[\partial^2\tau/\partial q^J \partial q^K]_{q^1=q^2=0}$，能由在初始点$O_O$和$O_S$点上的$M=PQ^{-1}$计算。用式(7.14)和式(7.19)，得到M的连续性公式为

$$
\begin{aligned}
M(O_S)=H^{UI}\{&P_1(O_S, O_O)+P_2(O_S, O_O)(H^{UI})^T M(O_O)H^{UI}\}\\
&\times\{Q_1(O_S, O_O)+Q_2(O_S, O_O)(H^{UI})^T\\
&\times M(O_O)H^{UI}\}^{-1}(H^{UI})^T
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

考虑O_S处具有$y^1=q^1$，$y^2=q^2$及y^i的地方直角坐标系(y^1, y^2, y^3)，其中y^3是点O_S处的沿着射线Ω切线度量的长度坐标。因而元素为$M_{ij}=[\partial^2\tau/\partial y^i \partial y^j]_{O_S}$的3×3矩阵$\hat{M}(O_S)$由下式给定

$$
\hat{M}(O_S)=\begin{bmatrix} M_{11}(O_S) & M_{12}(O_S) & -V_1 v^{-2} \\ M_{12}(O_S) & M_{22}(O_S) & -V_2 v^{-2} \\ -V_1 v^{-2} & -V_2 v^{-2} & -V_3 v^{-2} \end{bmatrix}
\tag{7.23}
$$

其中

$$
V_i=\frac{\partial v}{\partial x^m} G^{mn} H_{ni}
\tag{7.24}
$$

是O_S点上，沿地方直角坐标y^i方向的速度梯度。

最后，引进元素为$N_{ij}(O_S)=[\partial^2\tau/\partial x^i \partial x^j]_{O_S}$的3×3矩阵$\hat{N}(O_S)$，它由下式给出

$$
\begin{aligned}
N_{jk}(O_S)=&H_{jm}(O_S)H_{kn}(O_S)M_{mn}(O_S)\\
&+\Gamma^i_{jk}(O_S)p_i(O_S)
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

7.9 波 前 曲 率

在用户射线中心坐标系中，波前曲率的2×2矩阵K能简单地用下面关系，从2×2矩阵M中计算得到

$$K = vM = vPQ^{-1} \tag{7.26}$$

因而有

$$K(O_O) = v(O_O)M(O_O), \qquad K(O_S) = v(O_S)M(O_S)$$

同样地，曲率半径的2×2矩阵R由下式给定

$$R = K^{-1} = v^{-1}M^{-1} = v^{-1}QP^{-1} \tag{7.27}$$

用K(或者R)能确定波前的主要几何特征(主曲率、主方向、波前椭圆或波前双曲线等)。详细参看Červený和Pšenčik文章(1983b)。

7.10 旁轴走时

中心射线Ω邻近的走时为旁轴走时。

考虑一个单一的初始点O_O，且代表

$$\left.\begin{aligned} x^k(S,O_S) &= x^k(S) - x^k(O_S) \\ x^k(O,O_O) &= x^k(O) - x^k(O_O) \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

因而可用从O_O到O_S的完全射线追踪结果，不单求得O_O到O_S的走时，而且也能近似表达从O_O到S的走时，或甚至是O到S的走时，只要S接近O_S且O接近O_O：

$$\begin{aligned} \tau(S,O_O) &= \tau(O_S,O_O) + p_k(O_S)x^k(S,O_S) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^m(S,O_S)x^n(S,O_S)N_{mn}(O_S,O_O) \end{aligned} \tag{7.29}$$

同样，得(Červený等1984)

$$\begin{aligned} \tau(S,O) &= \tau(O_S,O_O) + x^k(S,O_S)p_k(O_S) - x^k(O,O_O)p_k(O_O) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^m(S,O_S)N_{mn}(O_S,O_O)x^n(S,O_S) \\ &\quad - \frac{1}{2}x^m(O,O_O)N_{mn}(O_O,O_S)x^n(O,O_O) \\ &\quad - x^i(O,O_O)H_{iJ}(O_O)[Q_2^{-1}(O_S,O_O)]_{JK} \\ &\quad \times H_{kK}(O_S)x^k(S,O_S) \end{aligned} \tag{7.30}$$

在式(7.29)和(7.30)中，$N_{mn}(O_S,O_O)$[或相应地为$N_{mn}(O_O,O_S)$]是由于一点源作用在O_O处(或相当在O_S)，在点O_S(或相当在点O_O)上走时场对一般坐标x^i的二阶导数的3×3矩阵$\hat{N}(O_S,O_O)$[或

相应地为$\hat{N}(O_O, O_S)$]的元素。它们由式(7.25)和(7.23)给出，其中M_{JK}由下式替代

$$M(O_S, O_O) = P_2(O_S, O_O)(Q_2(O_S, O_O))^{-1} \qquad (7.31a)$$

(或相应地为

$$M(O_O, O_S) = -(Q_2(O_S, O_O))^{-1}Q_1(O_S, O_O) \qquad (7.31b))$$

当然，式(7.29)和(7.30)只是近似的，它们对小的$x^i(S, O_S)$和$x^i(O, O_O)$有效。

7.11 旁轴射线

旁轴射线是位于中心射线Ω附近的射线。如果已知沿着Ω的射线传播矩阵，则旁轴射线能解析地作近似计算。

首先考虑初始值旁轴射线追踪的最简单问题。假定旁轴射线的初始点O安置在过O_O点垂直于射线Ω的平面上，且用$(q^1(O), q^2(O))$代表它的用户射线中心坐标。同样，假定点S安置在过O_S点垂直射线Ω的平面上，且用$(q^1(S), q^2(S))$代表它的用户射线中心坐标。用$p_1^{(q)}(O)$和$p_2^{(q)}(O)$代表在O处的慢度矢量的用户射线中心分量，而用$p_1^{(q)}(S)$和$p_2^{(q)}(S)$代表S处的用户射线中心分量。我们还指出

$$\left.\begin{aligned} W(O_O) &= [q^1(O) \quad q^2(O) \quad p_1^{(q)}(O) \quad p_2^{(q)}(O)]^T \\ W(O_S) &= [q^1(S) \quad q^2(S) \quad p_1^{(q)}(S) \quad p_2^{(q)}(S)]^T \end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

因而动力学射线追踪系统得出由$W(O_O)$给出的初始条件下的下列解析解：

$$W(O_S) = U\Pi(O_S, O_O)U^T W(O_O) \qquad (7.33)$$

其中U是4×4矩阵，由下式给定

$$U = \begin{bmatrix} H^{U1} & 0 \\ 0 & H^{U1} \end{bmatrix} \qquad (7.34)$$

因此，可用简单的矩阵乘法，确定位于旁轴射线上点S的用户射线中心坐标。另外，也得到S处慢度矢量的用户射线中心分量。

考虑一个更复杂的情况：旁轴射线的初始点O，一般不在过O_O点垂直于Ω的平面上，但它接近O_O。进一步，它的位置用一般坐标$x^i(O)$给出。初始慢度矢量$p(O)$在一般坐标系中，由它的协变分量$p_i(O)$给出。假定，不论$x^i(O)$和$p_i(O)$都用这样的一种方法选择，即，整条旁轴射线都接近中心射线Ω。我们希望确定点O_S邻近的旁轴射线的解析方程。用S表示接近于O_S的旁轴射线上一点，且有$x^i(S,O_S)=x^i(S)-x^i(O_S)$。因而得到如下的$x^i(S,O_S)$的参数方程：

$$x^i(S,O_S)=G^{ik}(O_S)H_{kn}(O_S)q^n(S) \tag{7.35}$$

其中q^3是一(小的)自由参数，且$q^1(S)$和$q^2(S)$由下式给出

$$q^K(S)=(Q_2(O_S,O_O))_{KL}H_{mL}(O_O)G^{mn}(O_O)$$
$$\times\{p_n(O)-p_n(O_O)-N_{nj}(O_O,O_S)x^j(O,O_O)\} \tag{7.36}$$

带有式(7.36)的参数方程式(7.35)代表点O_S邻近旁轴射线的直线近似。在式(7.30)中的所有符号像在第7.10节的式(7.36)中一样，都有相同的意义。

简单地可看到，在$q^3=0$情况下，点S位于在O_S点垂直于Ω的平面上。对于$q^3>0$情况，点被移到这个平面之“后”，而对于$q^3<0$，则移到平面之“前”。

7.12 旁轴射线的两点射线追踪

假定已知点O和S的位置，而且可找出通过这两点的射线。这是典型的两点射线追踪问题。对于旁轴射线，这个问题能够解析地解决。意思是能解析地求出慢度矢量p(O)和/或p(S)的近似表达式。慢度矢量确定射线的初始方向。

再一次用$x^i(S)$和$x^i(O)$表示S和O的一般坐标，且应用式(7.28)符号。微分式(7.30)，得到

$$
\left.\begin{aligned}
p_j(O) &= p_j(O_O) + N_{jk}(O_O, O_S)x^k(O, O_O) \\
&\quad + H_{jK}(O_O)(Q_2^{-1}(O_S, O_O))_{KL}H_{mL}(O_S)x^m(S, O_S) \\
p_j(S) &= p_j(O_S) + N_{jk}(O_S, O_O)x^k(S, O_S) \\
&\quad + H_{jK}(O_S)(Q_2^{-1}(O_S, O_O))_{LK}H_{mL}(O_O)x^m(O, O_O)
\end{aligned}\right\} \tag{7.37}
$$

式(7.37)中的所有符号，像在第7.10节一样，有相同的意义。

两点射线追踪问题的解式(7.37)仅是近似的。当然，旁轴射线愈接近中心射线 Ω，则精度愈高。但这个解能迭代地重复。这样的迭代循环，即在这个循环中点O处的初始慢度矢量每一步都要改变，可用来求出通过点S的射线，并具有所要求的精度。

7.13 Fresnel空间

Fresnel空间代表实际上影响接收点O_S波场的中心射线Ω的某一邻域。Fresnel空间有时候称作为"物理射线"(Kravtsov和Orlov，1980)。假定一个点源位于O_S上及接收器安在O_O上。因而由点集C所构成的Fresnel空间要满足如下条件：

$$
|\tau(C, O_O) + \tau(O_S, C) - \tau(O_S, O_O)| < \frac{1}{2}T \tag{7.38}
$$

这里T是所考虑谐波的周期

Fresnel空间可以通过传播矩阵的一定代数运算作简单的近似计算。我们考虑射线Ω上O_O和O_S之间的一点O_F。在点O_F邻近的任何一点F，如有且也只有如下条件，则此点是位于Fresnel空间之内

$$
\begin{aligned}
&|[x^i(F) - x^i(O_F)]H_{iM}(O_F)[M_{MN}(O_F, O_O) \\
&- M_{MN}(O_F, O_S)]H_{kN}(O_F)[x^k(F) - x^k(O_F)]| < T
\end{aligned} \tag{7.39}
$$

这里矩阵

$$
\mathbf{M}(O_F, O_O) = \mathbf{P}_2(O_F, O_O)(\mathbf{Q}_2(O_F, O_O))^{-1} \tag{7.40a}
$$

和

$$
\begin{aligned}
M(O_F,O_S)=[&-P_1(O_F,O_O)Q_2^T(O_S,O_O)\\
&+P_2(O_F,O_O)Q_1^T(O_S,O_O)\\
&\times[-Q_1(O_F,O_O)Q_2^T(O_S,O_O)\\
&+Q_2(O_F,O_O)Q_1^T(O_S,O_O)]^{-1}
\end{aligned}
\tag{7.40b}
$$

构成射线传播矩阵的2×2子矩阵

$$
\Pi(O_F,O_O)=\begin{bmatrix} Q_1(O_F,O_O) & Q_2(O_F,O_O) \\ P_1(O_F,O_O) & P_2(O_F,O_O) \end{bmatrix} \tag{7.41}
$$

和$\Pi(O_S,O_O)$(式(7.11))。矩阵$\Pi(O_F,O_O)$和$\Pi(O_S,O_O)$都由沿射线Ω从O_O到O_S通过O_F进行完全射线追踪得到。

不等式(7.39)可以用许多方法进行修改。对于弯曲交接面Σ上一点O_F，也能找到类似的关系。Fresnel空间与Σ的交线通常由一椭圆代表。只有椭圆内的交接面部分会对O_S处波场有显著的影响。

7.14 由于焦散引起的相移、KMAH指数

计算地震体波位移矢量的复值幅度，必须考虑由于焦散引起的相移。在完全射线追踪算法中，幅度由在任何焦散点上有关相移自动地进行修改（第5.8.3f节)。然而，可能还有必要知道由于沿Ω，在O_O和O_S之间的焦散点引起的完全相移$\delta\tau(O_S,O_O)$。相移能用O_O和O_S之间的射线轨迹Ω的控制变量$k(O_S,O_O)$表示，有

$$
\delta\tau(O_S,O_O)=-\frac{1}{2}\pi k(O_S,O_O) \tag{7.42}
$$

射线轨迹控制变量$k(O_S,O_O)$也称KMAH指数，它定义为Q_O和O_S之间，沿Ω上焦散点的和数；二阶焦散点(点焦散)在和数中要计算两次。在一阶焦散点(简单焦散)上，有$\det Q^R=0$，$Q^R\neq 0$，在二阶焦散点(点焦散)上，有$Q^R=0$。这里Q^R是相应于初始条件式(7.16)和(7.17)的几何扩散矩阵Q。在提出的方法中，KMAH指数贮存在IY(12)中。

注意，由于焦散引起的相移，是用与初始矩阵Q^{INIT}和P^{INIT}

有关的完全射线追踪法计算的唯一的量(第5.8.3f节)。

如果Q^{INIT}和P^{INIT}有变化，则焦散点的存在、位置、类型和数目，以及与此相应的KMAH指数也要变更。

7.15 射线幅度

在完全射线追踪算法中，由式(5.19)给出的矢性复值折合幅度$A_i(O_S)$是在O_S点上计算的。用O_S点上的射线中心坐标系表示。为了方便，在本节中考虑3×3矩阵$\hat{A}(O_S)$。元素$A_{ij}(O_S)$代表相应于O_O点上，在$e_j(O_O)$方向上极化(本征选择)并有单位初始矢性复值折合幅度，而在O_S点上矢性复值折合幅度的$e_i(O_S)$方向上的射线中心分量。非零量$Re(A_{ij}(O_S))$和$Im(A_{ij}(O_S))$贮存在Y(28),…,Y(27+NAMPL)中，这里NAMPL=2,4或8,取决于在O_O和O_S上波的类型(第5.2.1节)。

矩阵A_{ij}由贮存量Y(28),…,Y(NY)，其中NY=NAMPL+27，按如下方法构成：

(a) 射线初始点O_O上为P波，在点O_S上为P波(NAMPL=2)：

$$A_{ij}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & Y(28)+iY(29)\end{bmatrix}$$

(b) 射线初始点O_O上为P波，在点O_S上为S波(NAMPL=4)：

$$A_{ij}=\begin{bmatrix}0 & 0 & Y(28)+iY(29)\\0 & 0 & Y(30)+iY(31)\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(c) 射线初始点O_O上为S波，在点O_S上为P波(NAMPL=4)：

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Y(28)+iY(29) & Y(30)+iY(31) & 0 \end{bmatrix}$$

(d) 射线初始点O_0上为S波，在点O_S上为S波（NAMPL=8）：

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} Y(28)+iY(29) & Y(32)+iY(33) & 0 \\ Y(30)+iY(31) & Y(34)+iY(35) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

用$U^i(O_S)$表示点O_S上，以地方记录坐标系z^m表达的非折合复值射线幅度的逆变分量。如果记录坐标系z^m是直角坐标系，则不需要区分射线幅度的协变分量与逆变分量。地方记录坐标系可以与一般坐标系、用户射线中心坐标系等一致。用3×3变换矩阵给定的地方记录坐标系z^m：

$$Z^j_k(O_S)=\frac{\partial z^j}{\partial x^k}(O_S),\qquad Z^k_j(O_S)=\frac{\partial x^j}{\partial z^k}(O_S) \tag{7.43}$$

同样，在射线初始点O_0上，引进相对于地方坐标系z^j的射线幅度逆变分量$U^j(O_0)$，有关的变换矩阵是：

$$Z^k_j(O_0)=\frac{\partial x^k}{\partial z^j}(O_0),\qquad Z^j_k(O_0)=\frac{\partial z^j}{\partial x^k}(O_0) \tag{7.44}$$

初始点O_0的地方坐标系与点O_S的地方记录坐标系不需要是同类型的。

在O_S点的复值矢性射线幅度(包括由于焦散引起的相移)给定为

$$U^j(O_S)=\left[\frac{v(O_0)\rho(O_0)}{v(O_S)\rho(O_S)}\right]^{1/2}(J(O_S))^{-1/2}C^j_n(O_S,O_0)a^n(O_0) \tag{7.45}$$

其中

$$C^j_n(O_S,O_0)=Z^j_k(O_S)G^{km}(O_S)H_{mu}(O_S)\times A_{ur}(O_S,O_0)H_{sr}(O_0)Z^s_n(O_0) \tag{7.46}$$

$$a^n(O_O)=\lim_{O\to O_O}\{(J(O))^{1/2}U^n(O)\} \qquad (7.47)$$

极限计算的路径是沿着射线，与传播方向相反。几何扩散 $J=|\det Q|$ 在第7.7节中有定义。

对于在 O_O 点为点源情况，式(7.45)能被简化为

$$(J(O_S))^{-1/2}a^n(O_O)=|\det Q_2(O_S,O_O)|^{-1/2}v(O_O)g^n(O_O) \qquad (7.48)$$

其中

$$g^n(O_O)=\lim_{O\to O_O}\{(q^3(O)-q^3(O_O))U^n(O)\} \qquad (7.49)$$

这是点源的辐射花样。极限计算的路径与式(7.47)情况相同。因此，在 O_O 点为点源情况，能写

$$U^j(O_S)=v(O_O)\left[\frac{v(O_O)\rho(O_O)}{v(O_S)\rho(O_S)}\right]^{1/2}|\det Q_2(O_S,O_O)|^{-1/2}\times C_n^j(O_S,O_O)g^n(O_O) \qquad (7.50)$$

辐射花样 $g^n(O_O)$ 是射线参数 γ^1 和 γ^2 的函数：$g^n=g^n(O_O,\gamma^1,\gamma^2)$。

7.16 射线幅度的旁轴射线近似

由于波前曲率，慢度矢量的方向在射线 Ω 的邻域内要有变化。像位移矢量在P波情况要平行慢度矢量，而在S波情况要垂直于慢度矢量那样，矢性复值幅度也在 Ω 的邻域变化。考虑接近 O_S 的一点S。因而能近似地写出

$$U^j(S)\doteq Z_k^j(S)G^{km}(O_S)H_{mn}(O_S)B_{nr}(S,O_S)\times H_{sr}(O_S)Z_t^s(O_S)U^t(O_S) \qquad (7.51)$$

这里 $B_{nr}(S,O_S)$ 是3×3旁轴近似矩阵 $\hat{B}(S,O_S)$ 的元素。用完全射线追踪得到的量能计算这个矩阵。它是

$$\hat{B}(S,O_S)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \theta_1(S,O_S)\\ 0 & 1 & \theta_2(S,O_S)\\ -\theta_1(S,O_S) & -\theta_2(S,O_S) & 1\end{bmatrix} \qquad (7.52)$$

这里$\theta_i(S,O_S)$是3×1列矩阵$\hat{\theta}(S,O_S)$的分量：

$$\theta_i(S,O_S)=v(O_S)H_{ki}(O_S)G^{kl}(O_S)N_{ln}(O_S)x^n(S,O_S) \tag{7.53}$$

其中$N_{ln}(O_S)$由式(7.25)给定。式(7.52)也可以写成如下形式

$$B_{ij}(S,O_S)=\delta_{ij}+v(O_S)[H_{ki}(O_S)\delta_{j3} \\ -H_{kj}(O_S)\delta_{i3}]G^{kl}(O_S)N_{ln}(O_S)x^n(S,O_S) \tag{7.54}$$

7.17 结构交接面上或地球表面上的幅度

如果点O_S在结构交接面上，则上面的射线幅度表达式必须修改。与入射波同时还存在两个反射波(反射P波，反射S波)和两个折射波(折射P波，折射S波)。因而，为了计算O_S处的幅度，不仅必须贮存相应于入射波的量，而且还必须贮存相应于两个反射波或两个折射波的量。

在这里提出的完全射线追踪算法中，要考虑这样的一种可能性(第5.5.4节)。

假定相应于入射波，反射P波和反射S波的量都贮存在点O_S。分别用上标IW，RP和RS表示O_S处的相应于入射波，反射P波和反射S波的量。用$\hat{U}^{IW}(O_S)$，$\hat{U}^{RP}(O_S)$和$\hat{U}^{RS}(O_S)$表示O上、由地方记录坐标系、或一般坐标系表示的、相应于所考虑的三种波型的射线幅度分量的3×1列矩阵。因而有

$$\hat{U}(O_S)=\hat{U}^{IW}(O_S)+\hat{U}^{RP}(O_S)+\hat{U}^{RS}(O_S) \tag{7.55}$$

在交接面的另一侧，有

$$\hat{U}(O_S)=\hat{U}^{TP}(O_S)+\hat{U}^{TS}(O_S) \tag{7.56}$$

其中TP和TS相应于折射P波和折射S波。

如果点O_S位于地球表面，则可能用标准转换系数代替式(7.55)(Červený等，1977)。这样的可能性在提出的算法中也可有选择的考虑(第5.5.4节)。然而，式(7.55)或式(7.56)不单在地球表面，而且在任何交接面上是完全普遍可用的。

7.18 在轻微耗损介质中的射线幅度

由完全射线追踪计算出的量，能够用来计算因果性或非因果性吸收的耗损介质中地震体波的幅度。为简单起见，这里只限在频率域讨论。

在轻微耗损介质中，考虑具有小虚部的复值速度v_C，小虚部形式上假定当$\omega\to\infty$时，为ω^{-1}量级的小量(所谓Debye法)。这个速度虚部在射线和几何扩散计算中及在反射/折射系数计算中都不予以考虑，但却导出一个幅度衰减因子，

$$A_d(O_S)=\exp\left[-\omega\int_{O_O}^{O_S}\mathrm{Im}\left(\frac{1}{v_C(s)}\right)ds\right] \qquad (7.57)$$

这里积分取沿着射线Ω，从O_O到O_S。

如果量$t^*=2Y(2)$已知，对于非因果性及各种类型因果性的吸收情况，幅度衰减因子$A_d(O_S)$能被简单地进行解析计算。但是这个量是由完全射线追踪计算。对于非因果性的吸收，幅度衰减因子是

$$A_d(O_S)=\exp(-\pi f t^*) \qquad (7.58)$$

对于各种因果性吸收模型(Futterman, Müller)，幅度衰减因子的类似关系能在Červený文章(1985a)中找到。

7.19 位 移 矢 量

在完全弹性介质中，点O_S上位移矢量$u(O_S)$的逆变分量$u^j(O_S)$，在频率域是

$$u^j(O_S,\omega)=U^j(O_S)\exp[i\omega\tau(O_S,O_O)] \qquad (7.59)$$

在时间域是

$$u^j(O_S,t)=\mathrm{Re}\{U^j(O_S)\delta^{(A)}(t-\tau(O_S,O_O))\} \qquad (7.60)$$

这里ω是圆频率，$U^j(O_S)$由式(7.45)或式(7.50)给出，$\tau(O_S,O_O)$由式(7.1)给出。函数$\delta^{(A)}(\xi)$是相应于Dirac函数$\delta(\xi)$的解析单位脉冲：$\delta^{(A)}(\xi)=\delta(\xi)-i/\pi\xi$，式(7.59)中的时间因子$\exp(-i\omega t)$

被略去。在式(7.60)中，O_o处的时间依赖关系，这里假定为$\delta^{(A)}(t)$形式。这里假定Fourier变换的形式是

$$\left.\begin{aligned} u^j(O_s, t) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty} u^j(O_s, \omega)e^{-i\omega t}d\omega \\ u^j(O_s, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^j(O_s, t)e^{i\omega t}dt \end{aligned}\right\} \quad (7.61)$$

表达式(7.59)和(7.60)都能作简单的修改，而包括轻微耗损介质的影响。对于非因果性吸收，能用复值走时$\tau(O_s,O_o)+\frac{1}{2}it^*$替代实值走时$\tau(O_s,O_o)$来进行。式(7.60)中的函数$\delta^{(A)}(\xi)$，因而由下面关系给定

$$\delta^{(A)}(\xi) = -\frac{i}{\pi\xi} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\pi\xi}\right) - i\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi\xi}\right) \quad (7.62)$$

现在考虑一个实值震源时间函数$f(t)$，它的Fourier谱是$F(\omega)$。替代式(7.59)和(7.60)，得到

$$u^j(O_s, \omega) = F(\omega)U^j(O_s)\exp[i\omega\tau(O_s, O_o)] \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} u^j(O_s, t) &= f(t) * \mathrm{Re}\{U^j(O_s)\delta^{(A)}(t-\tau(O_s, O_o))\} \\ &= \mathrm{Re}\{f^{(A)}(t) * U^j(O_s)\delta(t-\tau(O_s, O_o))\} \end{aligned} \quad (7.64)$$

对吸收介质，$\delta(\xi)$由$\mathrm{Im}(1/\pi\xi)$替代。在式(7.64)中，$f^{(A)}(t)$表示相应于实值函数$f(t)$的复值解析信号：

$$f^{(A)}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = f(t) + ig(t) \quad (7.65)$$

其中$g(t)$是函数$f(t)$的Hilbert变换。

表达式(7.59)，(7.60)，(7.63)和(7.64)相应于所选择的、沿着射线Ω、从O_o到O_s传播的基本波。在时间域，这些表达式表示所谓基本合成地震图。

7.20 射线-合成体波地震图

迄今，仅讨论了由适当的字母数字编码给定的、且它的射线

通过O_S的一种基本波。然而，在成层介质中，可以有许多体波，它们从点源O_O，或者从初始曲面Σ，沿着各种射线轨迹Ω传播到点O_S。它们相应于各种反射波、折射波、多次反射波，转换波及另外地震体波。进而，甚至于一种单一的基本波可以沿着不同射线轨迹传到O_S(所谓多种射线)。这样，对于在O_S点的完全高频地震体波场u^j，能写成如下射线展开式：

$$\bar{u}^j(O_S)=\sum_{(\Omega)}u^j(O_S) \tag{7.66}$$

这里求和是对从O_O或者从初始曲面Σ开始，且通过O_S的所有射线Ω进行。位移贡献$u^j(O_S)$对应于各单条射线，且由前一节的公式给定。

在侧向变化的成层结构中，到达O_S点的射线Ω数目可以是无限的，这样仅仅是部分射线展开式才有实际可能。当然，这样要引进某些误差到射线计算中。

在频率域，能写出

$$\bar{u}^j(O_S,\omega)=F(\omega)\sum_{(\Omega)}U^j(O_S)\exp[i\omega\tau(O_S,O_O)] \tag{7.67}$$

这里$U^j(O_S)$和$\tau(O_S,O_O)$相应于前面推导过的、及讨论过的表达式。式(7.67)代表$F(\omega)=1$时的合成频率响应。所谓FFR(快速频率响应)算法能够用来非常有效地计算合成频率响应(Červený, 1985c)。

在时间域，HF(高频)合成体波地震图，由式(7.67)的Fourier变换得到(式(7.61))：

$$\bar{u}^j(O_S,t)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^\infty\bar{u}^j(O_S,\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{7.68a}$$

HF合成体波地震图表达式可写成

$$\begin{aligned}\bar{u}^j(O_S,t)&=f(t)*\mathrm{Re}\sum_{(\Omega)}U^j(O_S)\delta^{(A)}(t-\tau(O_S,O_O))\\&=\mathrm{Re}\left\{f^{(A)}(t)*\sum_{(\Omega)}U^j(O_S)\delta(t-\tau(O_S,O_O))\right\}\end{aligned} \tag{7.68b}$$

这两表达式都能用于复值$\tau(O_S,O_O)$的情况（耗损介质）。因而$\delta^{(A)}(\xi)$是由式(7.62)给定；$\delta(\xi)$应当被解释为$\mathrm{Im}(1/\pi\xi)$。在式(7.68b)的第二个表达式中，求和号内量$\sum_{(\Omega)}\cdots$代表复值合成脉冲响应。

有关射线合成地震图的更详细资料，请参看Červený文章(1985c)中的评述。

7.21 射线理论的弹性动力学Green函数

定义弹性动力学Green函数$\overline{G}_n^m(O_S,t;O_O,t_O)$如下：$\overline{G}_n^m(O_S,t;O_O,t_O)$是在$O_O$点，$t_O$时刻，在地方初始坐标系的第$n$个轴的方向上作用着一个单力单位脉冲，而在$O_S$上，$t$时刻，在地方记录坐标系中，所产生的位移矢量的第$m$个逆变分量。近似地写成

$$\overline{G}_n^m(O_S,t;O_O,t_O)=\sum_{(\Omega)}G_n^m(O_O,t;O_O,t_O) \qquad (7.69)$$

这里G_n^m是相应于各个基本波射线Ω的贡献(包括多次到达)。

为了确定G_n^m，应用式(7.50)，并且给定沿着地方初始坐标系的第n个轴方向的单力所产生的辐射花样$g^j(O_O)$。得到(Kennett, 1983)

$$g^j(O_O)=\begin{cases}(4\pi\rho(O_O)v^2(O_O))^{-1} & j=n\\ 0 & j\neq n\end{cases}$$

在时间域，得出

$$G_n^m(O_S,t;O_O,t_O)=A(O_S,O_O)\mathrm{Re}\{C_n^m(O_S,O_O)\times\delta^{(A)}(t-t_O-\tau(O_S,O_O))\} \qquad (7.70)$$

其中

$$A(O_S,O_O)=\frac{1}{4\pi}[v(O_O)\rho(O_O)v(O_S)\rho(O_S)\times|\det\mathbf{Q}_2(O_S,O_O)|]^{-1/2} \qquad (7.71)$$

在频率域，有

$$G_n^m(O_S,O_O,\omega)=A(O_S,O_O)C_n^m(O_S,O_O)\exp(i\omega\tau(O_S,O_O))$$

(7.72)

其中$G_n^m(O_S, O_0, \omega)$代表$G_n^m(O_S, t; O_0, O)$的Fourier谱。

7.22 矩张量点源

应用Green函数，能很容易写出三维侧向变化成层的块体结构中更一般类型的点源表达式。用$M^{kl}(t)$代表矩张量的逆变分量。因而在O_S点上的位移矢量的逆变分量$\bar{u}^n(O_S, t)$是

$$\bar{u}^n(O_S, t) = \dot{M}^{ij}(t) * \sum_{(\Omega)} G_i^n(O_S, t; O_0, O) p_j(O_0) \quad (7.73)$$

这里$\dot{M}^{ij}(t)$代表矩张量的时间导数及$p_j(O_0)$是源点O_0处慢度矢量的协变分量。这个公式能够用许多不同形式重新写出，其中的一个是

$$\bar{u}^n(O_S, t) = \mathrm{Re}\Big\{(\dot{M}^{ij}(t))^{(A)} * \sum_{(\Omega)} A(O_S, O_0) \times C_i^n(O_S, O_0) p_j(O_0) \delta(t - t_0 - \tau(O_S, O_0))\Big\} \quad (7.74)$$

这里$(\dot{M}^{ij}(t))^{(A)}$代表相应于$M^{ij}(t)$的时间导数的解析信号，$A(O_S, O_0)$由式(7.71)给定，以及$C_i^n(O_S, O_0)$由式(7.46)给定。

射线法只能用来计算地震波场的高频部分。因此，如果在震源-时间函数中包含有低频贡献时，则最后的地震图必须要进行高通滤波，以排除低频部分。

7.23 质点运动图

当用户任意地选定好O_S处的地方记录坐标系z^n，则完全射线追踪提供确定及绘制通过O_S点的任意平面上的质点运动图。完全波场的质点运动图，一般说来是颇为复杂，主要是在两个或两个以上基本波的各种干涉区，甚至在射线近似中也很复杂。如果将单种基本波从另外的波型中分离出来，则质点运动图显著地简化。为简单起见，考虑谐波及位于介质内一点O_S。当波以P波到

达O_S时，则它在那点被线性极化。当波以S波到达O_S时，则它的极化较为复杂：作为一条规律，S波是椭圆地被极化。椭圆极性可以由震源的辐射花样和交接面上的过临界反射引起。如果点O_S是位于一交接面上，当这两种波可能过临界地射入交接面时，则入射P波和S波的极性都可以是椭圆的。最后，在地球表面，对于入射P波，极性保持线性（P波常常亚临界地射入表面）。但是，S波常常是过临界地射入地球表面。在这种情况中，即使当入射S波线性极化时，它的极性在O_S点还是椭圆的。

7.24 Gauss光束和Gauss包

位移矢量表达式(7.63)和(7.64)是弹性动力学方程的高频解，即使动力学射线追踪系统解$\mathbf{Q}$，$\mathbf{P}$和$\mathbf{M}$由系统的复值解所替代时，也是如此。对于正定$\mathrm{Im}\mathbf{M}$，这样一个解代表射线Ω附近的Gauss光束。垂直于射线Ω平面上的Gauss光束幅度分布是Gauss型的，在射线Ω上有它的最大值。矩阵$\mathbf{L}=\left(\frac{1}{2}\omega\mathrm{Im}\mathbf{M}\right)^{-1/2}$代表Gauss光束的半宽度矩阵。

如果矩阵$\mathrm{Re}\,\mathbf{M}(O_0)$和$\mathrm{Im}\,\mathbf{M}(O_0)$（或者$\mathbf{L}(O_0)$）在射线$\Omega$的初始点$O_0$上给定，则能用完全射线追踪结果（特别，射线传播矩阵$\Pi(O_S, O_0)$）及式(7.22)，简单地确定射线Ω任意点O_S上的矩阵$\mathrm{Re}\,\mathbf{M}(O_S)$，$\mathrm{Im}\,\mathbf{M}(O_S)$（和$\mathbf{L}(O_S)$）。

同样，如果给定了$\mathbf{Q}(O_0)$和$\mathbf{P}(O_0)$，则可以用传播矩阵$\Pi(O_S, O_0)$和式(7.14)确定$\mathrm{Re}\,\mathbf{Q}(O_S)$和$\mathrm{Im}\,\mathbf{Q}(O_S)$。为了应用式(7.63)和(7.64)来计算Gauss光束，几何扩散$|\det\mathbf{Q}(O_S)|^{-1/2}$必须由$[\det\mathbf{Q}(O_S)]^{-1/2}$替代，而且由于焦散引起的相移必须从幅度因子中去掉。当KMAH指数已知后，则由于焦散引起的相移能被简单地去掉。但$[\det\mathbf{Q}(O_S)]^{1/2}$的符号却不能用完全射线追踪确定。因此，能用完全射线追踪得到，O_S点上集中在Ω邻近的单个Gauss光束的位移矢量最后表达式但符号除外。如果由于焦

散引起的相移未被去掉，则模糊乘子是$i^n(n=0,1,2,\cdots)$。

在Gauss光束的某些应用中——例如，用Gauss光束求和的波场计算中——模糊乘子是不需要知道的，因为它在求和公式中被另外因子抵消。因此，完全射线追踪是十分适合于确定求和过程中的Gauss光束的贡献。

至于Gauss光束，完全射线追踪的结果能够用来计算在沿Ω附近的点上集中的Gauss包(亦称作为"准像"，见Babich和Ulin,1981)，还能排除上面提到的模糊乘子。射线Ω上点O_S附近集中的Gauss包幅度，随着离O_S的距离平方根而指数地衰减，这不单在垂直于Ω的方向上，而且在所有方向都这样。

如果完全射线追踪的结果贮存在沿Ω的、在O_0和O_S之间的充分密集的点集中，则当在Gauss光束情况中，甚至通过焦散点，$[\det Q]^{-1/2}$必须沿着Ω连续地与光滑地变化时，模糊乘子能够去掉。

关于Gauss光束及Gauss包的更详细内容参看Červený文章(1985a,b)中的评论及那里列出的参考文章。

7.25 Gauss光束或Gauss包的求和

时间谐变高频地震体波场能够近似地用Gauss光束求和表示。对于构成波场的每一基本波，一充分密集的两参数射线系统采用标准完全射线追踪来计算。波场能展开成一集中在各单独射线附近Gauss光束的两参数系统。因而在任何接收点上的最后波场用通过接收器所在的某一邻域的所有光束求和来得到。由于光束的有限宽度，在求和中不需要考虑远离接收器的Gauss光束。有关的详细资料和展开公式，请参看Klimeš文章(1984a，1986)和Červený文章(1985a)。

用类似的方法，波场能用Gauss包的三参数系统近似地表达。上面提到过的射线二参数系统中的每一条射线，构成了集中在沿着射线有规律地分布点附近的Gauss包系统。求和是在影响接收

点波场的所有Gauss包上进行。像在Gauss光束情况一样，在远离接收器一些点附近集中的Gauss包不需要考虑。详细的资料请参看Klimeš文章(1984b)。

在求和公式中，无限宽Gauss光束(旁轴射线近似)能够用来替代有限宽Gauss光束。用这种方法，可以得到Maslov法(Chapman和Drummond，1982；Klimeš，1984b；Thompson 和 Chapman，1985)。

在二维计算中，不需要计算射线的两参数系统——射线的一参数系统足够了。但二维(带状)Gauss光束必须用于求和公式中。参看Červený和Pšenčik文章(1983a)和Červený文章(1985a)。

如果仅仅对沿一给定剖面(一般为曲线)的波场有兴趣，则基于Gauss光束求和的类似简化过程，甚至在三维介质中也能应用。在这样一种情况中，仅有大致顺着剖面的那些射线的追踪是充分的。这些射线的离源参数，在射线参数γ^1和γ^2的二维系列中形成一条曲线。这样的一种计算，在这里称作为剖面型计算。

在这种情况中，量YI(22)＝Γ(式(6.1))必须由相应于所讨论射线的射线参数曲面上、上面提到过的曲线那部分弧长来替代。因而矩阵Γ_{KL}(式(6.2))是奇异的，具有一个零本征值。相当于非零本征值的本征矢量是与射线参数曲面上的曲线相切；而另一个是垂直于曲线。但完全射线追踪的算法保持相同。

在三维介质中，剖面型计算，数值上是非常有效的；它只比标准二维计算稍化多一点时间。它可用于各种震源一接收结构中高频地震波场的数值模拟：如曲面剖面(在岩石圈的深部地震测深中等)，钻孔剖面(垂直地震剖面)，钻孔一钻孔计算，以及法向射线剖面计算等。

7.26 沿射线的射线传播矩阵的积分

这种类型的一些积分

$$B_{\beta}=\int_{\sigma_0}^{\sigma} F_{\alpha}(\sigma)\Pi_{\alpha\beta}(\sigma,\sigma_0)\mathrm{d}\sigma \tag{7.75}$$

或

$$B_{\alpha\beta}=\int_{\sigma_0}^{\sigma} \Pi_{\gamma\alpha}(\sigma,\sigma_0)F_{\gamma\delta}(\sigma)\Pi_{\delta\beta}(\sigma,\sigma_0)\mathrm{d}\sigma \tag{7.76}$$

这里求积是沿着射线Ω进行，且σ由式(5.1)定义，这些积分在扰动理论中(Farra和Madariaga，1987)和在Gauss光束和包的形状的最优化中(Klimeš，1985)是重要的。这里沿着射线的加权函数$F_{\alpha}(\sigma)$和$F_{\gamma\delta}(\sigma)$可以与速度及它们的导数有关，和(或者)与速度扰动有关。$\sigma=\sigma_0$代表射线Ω的初始点。

有两种计算积分的方法。

(a) 直接将数值求积代入完全射线追踪算法中。这种方法有两个不方便：(i)完全射线追踪算法更为复杂，(ii)积分只计算前面给定的加权函数，且不重复完全射线追踪计算情况下，加权函数不能改变。

(b) 完全射线追踪的结果用独立变量σ的STORE步长，沿射线Ω贮存起来(第5.5.1节)。因而积分可以在稍后用另外程序进行计算。这方法有两个不方便：(i)因为这些量用一个独立变量的给定步长进行贮存，所以射线与交接面的交点也必须贮存在一个文件中并给予考虑；(ii)因为加权函数通常与速度分布有关，所以计算速度和它的导数的程序，如果需要某些未贮存着的速度导数时，必须在射线的每一贮存点上反复被调用。

上面定义的矩阵$B_{\alpha\beta}$常常是病态条件的，甚至在有一恰好条件正定加权矩阵$F_{\alpha\beta}(\sigma)$的情况，也是这样。因此，推荐用

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{7.77}$$

计算矩阵(Klimeš，1985)

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}-\mathbf{B}_{12}\mathbf{B}_{22}^{-1}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{7.78}$$

而不直接计算$B_{\alpha\beta}$。

对于C的2×2子矩阵的微分方程直接得自式(7.76)，有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}\mathbf{C}_{11} &= [\mathbf{\Pi}_1(\sigma,\sigma_0)-\mathbf{\Pi}_2(\sigma,\sigma_0)\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21}]^T \\
&\quad \times \mathbf{F}(\sigma)[\mathbf{\Pi}_1(\sigma,\sigma_0)-\mathbf{\Pi}_2(\sigma,\sigma_0)\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21}], \\
\frac{d}{d\sigma}\mathbf{C}_{21} &= \mathbf{\Pi}_2^T(\sigma,\sigma_0)\mathbf{F}(\sigma)\mathbf{\Pi}_1(\sigma,\sigma_0), \\
\frac{d}{d\sigma}\mathbf{C}_{12} &= \mathbf{\Pi}_1^T(\sigma,\sigma_0)\mathbf{F}(\sigma)\mathbf{\Pi}_2(\sigma,\sigma_0), \\
\frac{d}{d\sigma}\mathbf{C}_{22} &= \mathbf{\Pi}_2^T(\sigma,\sigma_0)\mathbf{F}(\sigma)\mathbf{\Pi}_2(\sigma,\sigma_0)
\end{aligned} \tag{7.79}$$

这里

$$\mathbf{\Pi}_1(\sigma,\sigma_0)=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1(\sigma,\sigma_0)\\ \mathbf{P}_1(\sigma,\sigma_0)\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{\Pi}_2(\sigma,\sigma_0)=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_2(\sigma,\sigma_0)\\ \mathbf{P}_2(\sigma,\sigma_0)\end{bmatrix}$$

在式(7.79)中，σ又是由式(5.1)定义的、沿着射线Ω的变量。

7.27 其他的应用

从原理上说，像前面提到过的那些应用一样，完全射线追踪能有效地用在复杂的二维和三维结构的、任何种类的、高频地震波场的数值模拟中，包括由有限震源产生的高频地震波场计算(Červený 等，1987)，各种衍射问题的解，局部地质条件对表面运动影响的研究，Kirchhoff积分的计算。同样，完全射线追踪会在解决不论是运动学，或是动力学的反演地震问题中找到应用。例如，Klimeš(1987)在一般三维模型中，震中运动学定位算法中，曾应用过的完全射线追踪和Gauss包方法。

完全射线追踪的应用数目很快在增加，且完全射线追踪在许多其他地震学重要问题必然也起重要的作用。

第二章 追踪射线和波前的数值方法

A. Hanyga

（波兰科学院地球物理研究所）

1. 基本假定和方法

1.1 引言、扩展了的近似射线理论(ART)

这里提出的算法意欲达到逻辑上的一致性及对地震学和勘探地球物理中的体波轨迹的计算的尽量完全的收集。特别考虑了边缘和焦散衍射，以及平面交接面上产生的首波。下面的方法是近似射线理论的一个扩充(Hanyga, 1980, 1982, 1983, 1984a—d, 1986, 1988)。这些方法已经在软件包DANUTA中执行。

在本章中，仅叙述算法及引入在计算中应用到的方程。如果这些方程在其他地方还没有发表过，仅给出概略的推导。

将这种方法建立在一个坚实的概念性基础上，以下面概念的表述开始。对于有关理论的发展，读者请参看Hanyga等文章(1984)及Hanyga文章(1980, 1982, 1983, 1984a—d, 1986)。

一般说，地震图/地震迹线能表达为有限个体波到这简正振型及一个可略去的余项相叠加(Kamel 和 Felsen, 1981)。体波主要在地震图的早到部分。考虑到震源与记录仪器之间的复杂几何性和小的水平错距，在勘探地球物理中，普通的地震迹线基本上是体波到达的叠加。

为了给定在点x上记录地震图$u(x, t)$的体波内容，显然要解

卷震源信号$s(t)$：

$$u(x,t)=s(t)*R_\delta(x,t) \tag{1.1}$$

核R_δ代表由震源引起的波场分布，震源的信号$s(t)$是Dirac 函数$\delta(t)$。这表现出一系列位于从震源出发的传播曲面上的奇异点。考虑它的尖峰位置，能标出每一奇异点从震源x_0到接收处x的走时$S(x_0,x)$。

波场R_δ允许用它的奇异分量S_δ和一个局部可积的、充分光滑的函数T_δ进行分解，即

$$R_\delta(x,t)=S_\delta(t,x)+T_\delta(t,x) \tag{1.2}$$

前者代表波场的体波内容，后者代表尾波。如果奇异分量是位于有关波前$S(x_0,x)=t$上一族给定分布的叠加，则分解式(1.2)是唯一的。一族合宜的分布R_δ包括 Dirac 函数，它的不定积分和它们的Hilbert变换是：

$$S_\delta(x,t)=\sum_{r,\sigma}a_{r,\sigma}(x)g_r(t-S_\sigma(x_0,x))r_\sigma(x,\nabla S_\sigma(x_0,x)) \tag{1.3}$$

其中有$g_0=\delta$，$g_1=H$(Heaviside阶梯函数)，$g_\lambda:=t_+^{\lambda-1}=H(t)t^{\lambda-1}$，$\lambda=2,\cdots$，或者$g_0=-1/\pi t$，$g_1=\ln|t|$等。这些分布由 Gel'fand和Shilov(1964)严格定义。在S_σ上的控制变量σ提供射线编码(从x_0到x的射线路径上，信号的转换和反射)。极性矢量$r_\sigma(x, p)$是慢度$p=\nabla S_\sigma(x_0,x)=\partial S_\sigma/\partial x$的函数。系数$a_{r,\sigma}(x)$等同于体波幅度。

与尾波不同，体波服从相对简单的传播定律。每一族波前$S_\sigma(x_0,x)=t$，参数t与走时一致

$$S_\sigma(x_0,X(t;u,v))=t \tag{1.4}$$

以此方式能够构成射线$x=X(t;u,v)$的叠合。参数u和v沿每条射线是常数。它们能够选择为在点源处射线的离源角。幅度$a_{r,\sigma}$满足沿每条射线$X(t;u_0,v_0)$的一系列常微分方程(传输方程)，一般有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}a_{r,\sigma}}{\mathrm{d}t}=F_\sigma(x,p)a_{r,\sigma}+G_{r,\sigma}(x,p;\{a_{s,\sigma},s<r\}) \tag{1.5}$$

这里p代表沿射线的慢度。

对于$r=0$最高阶不连续情况，式(1.5)是齐次的：$G_{0,\sigma}=0$。在这种情况，式(1.5)等于两条定律：能量守恒(Hanyga等，1984)和S波极性转动定律。前者表明，波前$S_\sigma(x_0,x)=t$和$S_\sigma(x_0,x)=t+\Delta$间射线管内的能量E，只要舍去尾波，则与t无关(与$g_0(t-S_\sigma)$有关的能量被强制顺着射线管)。因而能量密度由$E|J|^{-1}$给定，其中

$$J(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u}\times\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v}\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (1.6)$$

代表波前t和$t+\mathrm{d}t$之间的无限小射线管的体积。与单一体波S_σ有关的能量密度，在近似展开式中取最低阶情况，比例于$|a_{0,\sigma}|^2$，其中，$r=0$相当于最高阶奇异点g_0，射线扩散J和最强奇异点幅度之间的熟知关系

$$a_{0,\sigma}=A_{0,\sigma}|J_t|^{-1/2} \qquad (1.7)$$

其中$A_{0,\sigma}$沿射线按段为常数。

每一体波，与其他波无关而独立传播，直到它的射线与一交接面或与一具有传播速度的高梯度层相交。前种情况，用有关边界条件的近似解处理，具有满意的结果(第4.12节和第4.13节)，而后种情况却超出了近似射线理论的范围。边界条件提供各种体波σ与幅度$a_{r,\sigma}$之间的唯一耦合。

推导上面形式的主要好处是得到体波廉价的计算方法。另外，传播速度和走时之间关系的反演本身就是非常宝贵的地质结构资料源。计算下面给出的一个给定点源和接收处的众多走时的方法明显包括有两个步骤。

步骤1，求解与体波有关射线场的两点边界值问题。体波用交接面上列出的、连续转换和反射编码给定。输出包括连接震源和接收处的走时和离源角。

步骤2，用由离源角和震源特征确定的初始资料积分传输方程式(1.5)。因为限于最低阶渐近近似($r=0$)，步骤2主要是对

一个矩阵值方程组的积分(第4.4节，第4.8节及第4.10节)，允许计算射线扩散Jacobi算子J。

上述过程称作动力学射线追踪(DRT)。

上面概要说过的ART(近似射线理论)无焦散处(由$J=0$定义)，阴影边界和临界射线附近不再有效。但能用ART方法的适当扩充予以弥补。

在射线场$X(t;u,v)$的焦散处，式(1.7)含有无限幅度。非线性方程呈现一个$0\cdot\infty$奇异点。这种情况全是这样事实的一个简单结果，即射线管$X(t;u,v)$的横截面收缩为零。但是如果认为在物理空间中，测量流动比测量体积更自然的话，则能量密度保持有限。例如，认为测量$dtdudv$是常数。实际上，我们选择一种在焦散点上，相对于$dtdudv$非奇异性的测量，且用新的能量密度平方根定义新的幅度的绝对值。DRT方程的有关变换(第4节)包括很容易进行数值计算的非线性代数变换。还得到由接触焦散之后的体波所产生的相移。

注意，在简单焦散点上由信号产生的相移，如果介质是强各向异性，则不需是熟知的相延迟$\frac{1}{2}\pi$。

体波对在普通的接收处x记录到的地震图线贡献取如下形式

$$u_o(t,s)=a_{0,a}\,\tilde{s}(t)r_a(x,p) \tag{1.8}$$

其中

$$\tilde{s}(t)=s(t-S_a(x_0,x))\cos\alpha-\mathrm{H}s(t-S_a(x_0,x))\sin\alpha \tag{1.9}$$

$$\mathrm{H}s(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{1}{t'-t}s(t') \tag{1.10}$$

代表Hilbert变换，及α是由焦散点上体波和全反射所产生的相变。式(1.8)的输入数据能从动力学射线追踪得到，即使体波已经触到从震源到接收处的路径上的焦散点。

如果接收处位于焦散点，阴影边界或临界反射射线的邻域上，则式(1.8)就不能用了。对上述任何一种情况，在以射线有不同覆

盖划分两个区域的临界曲面上的幅度$a_{0..}$趋向于无穷。同时，在临界曲面上，有些体波的走时是一致的。在它的邻近，这些波出现强的干涉，生成一个合成信号。合成信号的幅度在焦散处是有限的，且能用动力学射线追踪的下面修改进行计算（为了确定起见，我们在这里专门讨论焦散）。

步骤 1，求解加进复杂信号的体波的两点边界值问题。输出包括这些波的走时$T_1,\cdots,T_K$和它们在震源处的离源角。

步骤 2，对每一个组成的体波进行DRT。输出包括在焦散处是非奇异的、适当测量所涉及到的幅度。

步骤 3，合成信号是走时 $T_1,\cdots,T_K$ 的显式可计算非线性函数，它与步骤 2 中所得到的幅度线性相关。

这里所叙述的方法可以认为是一个Gauss光束追踪的变种（第二篇第一章）。后一种方法避免了两点边界值问题的一个严格解，且用一不同方法考虑衍射现象。应用旁轴近似也能避开严格的两点射线追踪（Červený和Pšenčik，1983）。

本章提出的方程考虑了各向同性及横向各向同性介质。

本章以如下方法进行组织。在第 2 节和第 3 节中，提出了解地震射线的初始值问题和两点边界值问题的基本算法和方法（步骤1）。在第 4 节中，讨论DRT方程的积分。对于基础性的理论，参考Hanyga等文章（1984）和Hanyga文章（1982，1984a—c）。我们主要依靠非线性DRT方程，但第4.17节包含有不同的线性 DRT 方程的简明讨论及每一种方法优点的讨论。最后，在第 5 节中，提出了一些计算焦散处或阴影边界上合成信号的方法。详细理论参考Hanyga文章（1988）及Hanyga和Seredyńska（1988）。

关于模型的假设和追踪算法所要求的模型资料的说明将在下节讨论。

1.2 模型的表达

射线追踪算法的输入包括存在波场的介质资料，输入中称作

为模型。模型由追踪程序调用的模型子程序库给定，或者由包含有数据资料的文件给定。模型子程序能够定义一类模型，而数据资料可以在这类模型中选出一个给定的模型。假定模型库已经由用户提供。射线追踪程序的执行，可用将目的文件和有关的子程序库与用户模型库联结起来的办法来实现。模型资料文件只有通过模型子程序进入，因而它们留在用户的处理权限中。

模型子程序必须满足两组要求：

(i)模型必须与追踪算法一致；

(ii)直接由追踪程序和它们的子程序调用的模型子程序必须具有合适的名字，而且输入和输出必须与调用程序相一致。

在本节中，讨论第一类要求。第二组要求能够在带有软件包的资料文件中找到。

假定模型的物理相关部分包含在一个模型范围框$\mathscr{B}$：$z_{1,k}<x_k<z_{2,k}$，$k=1,2,3$中。坐标系(x_k)既可是直角坐标，也可是曲线正交坐标。

假定介质是线性弹性的，特别，不考虑衰减与频散；弹性模量按段连续，且有高到二阶的分段连续导数。块体$\mathscr{S}$定义为在$\mathscr{B}$中的一最大子块体，在$\mathscr{S}$中所有弹性模量具有$\mathscr{C}^2$光滑的性质。两个模型块不相交，且所有块体连起来覆盖了$\mathscr{B}$。为了方便参考起见，模型中每一块体一一对应地赋一个整β值。

每一块体由几个称作为交接面的曲面围成。这套交接面是定义模型的最初想法之一。假定交接面是一个没有边界的曲面，即既可延伸到无穷处，也可以是形状等效于一个球状的封闭曲面。特别，除了它是封闭之外，否则它可定义在范围框$\mathscr{B}$之外。如果在模型中，存在有N个交接面，则每一个交接面被赋值为一个由1到N之间的参考数λ，且赋值是一一对应的。

只要模型交接面有连续法线和曲率，虽然在实际中，法线和曲率的不连续性在这方面不需要有任何有意义的影响，则迭代射线追踪法的收敛性是保证的。

交接面的点由方程$f(x, \lambda)=0$给定。某些两点追踪算法要求交接面参数表达式$x_k=g_k(\xi, \eta, \lambda)$(第3.4节)。为了一致起见，两个表达式用下面结构连接起来(Gjøystdal等，1984)。一个可能的曲线坐标系(ξ, η, ζ)与每一个交接面λ相联系。这由坐标变换$x=H(\xi,\eta,\zeta;\lambda)$和$(\xi,\eta,\zeta)=G(x;\lambda)$给定。交接面$\lambda$由方程$\zeta=h(\xi,\eta;\lambda)$给定，且它的两个不同表达式用$f(x;\lambda)=\zeta-h(\xi,\eta;\lambda)$和$g(\xi,\eta;\lambda)=H(\xi,\eta,h(\xi,\eta;\lambda);\lambda)$给定。

每一个交接面是用一个连续单位法矢量$n(x;\lambda)$给定的方向赋予的，其中λ是交接面的参考数。法线$n(x;\lambda)$指向区域$f(x;\lambda)>0$，两点射线追踪要求计算位于交接面λ的邻域上一些点的法线$n(x;\lambda)$。因而，假定$n(x;\lambda)$到处有定义，且满足如下条件：(1)$n(x;\lambda)$是一个x的连续函数；(2)$n(x;\lambda)$是一个单位矢量；(3)对于位于交接面λ上的x，矢量$n(x;\lambda)$正交于λ。一种自然的选择是$n(x;\lambda)=|\nabla f(x;\lambda)|^{-1}\nabla f(x;\lambda)$。

交接面$\mathscr{I}$上一点x，如果x上两块邻近于$\mathscr{I}$的块体的参考数是相等的，则这点是非物理的。这个概念关系到初始值追踪(第2节)，这排除了在一个交接面的非物理点上的射线的反射与转换。

假定充满块体的介质各向同性，或是横向各向同性。在前种情况，块体被赋予控制变量$\rho=-1, 0$或1。如果$\rho=1$，则块体被认为是普通的各向同性块体，且传播速度$c_P=f_1(x;\beta)$，$c_S=f_2(x;\beta)$在块体的邻域中给定。如果$\rho=0$或-1，则块体被假定为是均匀的，或者有不变的垂直梯度，而且相应的数值资料必须要由一个模型子程序提供。

横向各向同性块体被赋予$\rho=2, 3$或4。如果$\rho=2$，则假定各向同性轴(附录B)到处都是沿着x_3的方向；这样，整个块体及块体邻近的五个弹性模量必须给定。对于$\rho=3$和4情况，各向同性轴的方向由在单位圆球上的两个角度θ和φ给定，其中$\theta=0$相当于x_3方向。在$\rho=3$情况，假定在整个块体中，θ和φ是常数值。ρ为负值表示块体是均匀的。

迭代射线追踪算法要求代表块体的弹性性质变化的所有函数，在块体边界以外都被光滑地外插(第3节)。

2. 初始值射线追踪

2.1 基本概念

现叙述在N维空间$R^N=R^3\times R^{N-3}$中，对一分段光滑曲线$w_k(s)$求解初始值问题的方法，假定曲线投影在一条地震射线$x_k(t)$上，$k=1,2,3$；在$k\leqslant3$情况，有$w_k(t)=x_k(t)$。$N=6$情况为运动学(初始值)追踪。

在最一般情况中，曲线$w_k(t)$与单个模型块的交点由对微分方程组的积分来确定；前面六个方程能表示为Hamilton形式，即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H}{\mathrm{d}p_k}(x,p;l,\sigma),\\ \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\partial H}{\partial x_k}(x,p;l,\sigma),\end{aligned}\qquad k=1,2,3 \tag{2.1}$$

其中，对于$k=1,2,3$情况，有$p_k(t)=w_{k+3}(t)$(Hanyga等，1984)。整数自变量l是含有点x的块体参考数，σ是波的类型。波动Hamilton算子H及其有关量的定义可在附录A和B中找到。

在射线与交接面$\mathscr{S}$的交点上，曲线$w_k(t)$满足相应的边界条件。边界条件包括经过交接面$\mathscr{S}$后信号路径的选择。如果l_1是射线通过$\mathscr{S}$后所进入的块体，及σ_1是赋予给l_1块体中射线段的波的类型，则对于w_k的前面六个分量的边界条件可假定有如下形式

$$x(t_1+0)=x(t_1-0)\in\mathscr{S} \tag{2.2}$$

$$\nu\times[p(t_1+0)-p(t_1-0)]=0 \tag{2.3}$$

$$H(x(t_1+0),p(t_1+0);l_1,\sigma_1)=1 \tag{2.4}$$

在式(2.3)中，ν代表在$x(t_1-0)$点计算的、垂直于交接面$\mathscr{S}$的法向矢量。由式(2.3)和(2.4)，可确定向外慢度$p_0=p(t_1+0)$。

如果不论块体l是各向同性还是σ是l中最快的一类波，函数$H(x,p;l,\sigma)$都是凸状的(Courant和Hilbert，1962)。在这些情况中，在入射慢度$p(t_1-0)$的亚临界范围，式(2.3)和(2.4)有两个实值解；在过临界范围，则有两个复共轭解。在亚临界范围，p_0由显然的几何条件唯一地确定，即

$$\frac{\partial H}{\partial p_0}(x_1,p_0;l_1,\sigma_1)\cdot\nu>0\text{或}<0 \tag{2.5}$$

这包含有向外射线进入块体l_1。在过临界范围，条件式(2.5)由辐射条件替代(沿着$\mathcal{S}$传播的面波的消散)

$$\operatorname{Im}(p_0\cdot\nu)\begin{cases}>0 & \text{如果}\nu\text{指向}l\\ <0 & \text{相反情况}\end{cases} \tag{2.6}$$

2.2 初始值追踪器的组元算法

初始值追踪包括曲线上有关点的数值计算及这条曲线与一族曲面(中断曲面)交点的确定。在与中断曲面相交的交点上，追踪程序进行多种运算，例如，交接面上边界条件的应用、独立变量变换、记录交点或追踪结果。

追踪两个连续中断曲面之间曲线弧的任务，是通过调用模块INTFIND或CHINTR2来完成。模块INTFIND完成常微分方程组的数值积分，这常微分方程组由普通子程序RHS(t, Y, F)给定，而该子程序是在给定t及曲线参数和非独立变量矢量Y的数值时，计算右边矢量F。模块CHINTR2计算根据普通子程序RAY(X,Y,t,IFAIL)给定的$y=r(t;x)$，$r(0;x)=x$表示的曲线上的点。字符名RHS和RAY是INTFIND和CHINTR2的自变量以及在调用中，用适当的子程序代替它们。

中断曲面由普通的Fortran函数SUR(X)定义，函数的字符名是INTFIND和CHINTR2的一个自变量。中断曲面$f(x;k)=0$由经过公共块/A/传到模块SUR中的控制变量k给定，且$f(x;k)$的值以SUR(X)的值来获得。SUR(X)中包括的一系列中断面，虽

然在编辑时间中是固定的，但只有一部分，在执行时间调用INTFIND或者CHINTR2的过程中是活动的。将整数数组SURIND引入到INTFIND和CHINTR2的自变量中，来除去暂时无关的中断曲线。SURIND(k)=0，则略去一个中断曲面$f(x;k)=0$。特别，可略去函数$f(x;k)=0$的计算，该函数代表那些没有在当前块体边界上的交接面。为此，模型库必须包括在软件包说明文件中所叙述的子程序MODBLB。

模块INTFIND考虑附加中断，即不用中断曲面来给定。如果由RHS调用的子程序已将非零值代入公共块/MK/中的整数变量MARK,则中断会在计算下一步积分过程中出现。如果MARK<0，则INTFIND完成由普通子程序TRANS给定的非独立变量的变换，并恢复积分。对于任何其他MARK的非零值，模块INTFIND总存在。字符名TRANS是INTFIND的一个自变量。附加中断和变量变换在动力学射线追踪中起一个重要的作用(第4节)。在本小节中所叙述的这些便利条件不是由应用在运动学追踪中的INTFIND的简化程序INTFINC提供。

在有些运动学追踪器中，CHINTR2由模块CHINTR1替代。CHINTR1只考虑一个中断曲面，且在k保证SURIND(k)≠0的循环中被调用。对于均匀和常梯度块体中的运动学射线追踪情况(附录C)，CHINTR1与确定弧线的模块RAYCUR1一起联合应用。

对于INTFIND和CHINTR2的详细叙述，读者可参考附录F。

另一个初始值追踪器的重要组元是计算经过交接面后INTFIND或CHINTR2初始数据的模块。这是建立在式(2.2)—(2.4)基础之上。对于各向同性块体及对于T波(附录B)，式(2.2)—(2.4)的解以显式得到。

2.3 初始值问题的公式

初始值追踪问题，由初始数据和一套给定的，经过交接面后向外传播的波的规则来确定。这些规则用与某些特殊交接面有联系的一系列事件(带有或不带有转换的反射，带有转换的折射)来表达；在任何其他交接面上，应用补缺原则(没有转换的折射)。如果所列内容执行完毕，且终止条件也已被满足，则追踪完成。否则，如果射线离开了模型范围框式(1.2)或者过临界入射排除了问题的公式中强加的规则所表示的连续性时，则追踪停止。

对于运动学追踪情况，初始数据由射线的初始点x_0和两个离源角θ和φ给定。因而慢度p的初始值由下列表达式给定

$$\left.\begin{array}{l} n_1=\sin\theta\cos\varphi,\quad n_2=\sin\theta\sin\varphi,\quad n_3=\cos\theta \\ H=H(x_0,n),\quad p_k=\dfrac{n_k}{H}\quad k=1,2,3 \end{array}\right\}\qquad(2.8)$$

对于DRT的附加初始条件讨论在第4节。

连续性规则由折合射线编码RD(k)表达。RD(1)是由用户要求的非补缺事件数。每一个非补缺事件用RD的三个连续数组元素给定：交接面参考数i，入射边ι和一个给定事件(反射，转换或两者兼有)的数；对于各向异性介质，向外波类型必须给定，如果入射波从区域$f(x;i)>0$到达，则入射边$\iota=1$。如果入射点位于交接面的非物理部分上，则不应用反射或转换。

另一方面，某些折合射线编码中，数组元素i，ι由块体面所替代，这些块体面用块体参考数的顺序对(β_1,β_2)给定。在这种情况中，只要入射波有块体β_1到达，则这个事件就作用在任何分离块体β_1和β_2的交接面上。注意，一个块体面由几张光滑交接面构成。

所列事件的顺序在某些追踪器中是无关的。另外，可要求射线有给定数的转折点。

如果下列条件有一个被满足，则初始值追踪器停止工作：

(1)已经出现过临界入射；(2)射线已经离开模型范围框；(3)已经检测到模型不一致性；(4)折合射线编码已被执行，接着，由用户给定的终止条件已被满足。

下列终止条件是为用户编制的：(1)射线与由用户给定的曲面 $r(x)=0$ (接收处曲面)相交；(2)射线达到给定点的最近点；(3)射线达到一条直线的最近点(例如一口井的轴线)。所有条件都用与一超曲面相交的六维曲线 $w_k(t)$, $k=1,\cdots,6$表示。

在运动学射线追踪的输出中，最重要的项目是射线编码，含有绘图用射线点的一系列文件及含有适合于用迭代两点射线追踪程序处理的、射线说明的非格式文件(第3节)。

2.4 初始值追踪中误差控制

误差由控制参数T_1和T_2控制，它们限定w_i，$i=1,\cdots,N$局部积分误差e_i(在一个积分步中引起的)，即

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{|e_i|}{s_i\min(f_i|w_i|)}<T_1, \tag{2.9}$$

及确定曲线$w_i(t)$与中断曲面

$$|t_2-t_1|<T_2, \tag{2.10}$$

交点时的误差，其中$[t_1, t_2]$是含有交点的已知间隔。

参数T_1控制积分的有效位数。对于$i\leqslant 6$情况，层面f_i和比例尺s_i分别固定为0.001和1。其余层面和比例尺以及两个容许误差T_1和T_2由用户确定。

影响追踪精度的另一个因素是包含在模型子程序中的精度。

在积分中的有效位数能用在等间隔时间点上、沿射线的波动Hamilton算子的任意选择的计算来核对。预期沿射线的Hamilton算子是常数。不等于1的常数Hamilton算子表示初始数据中的误差。波动Hamilton算子大的变化分别表示用户提供的模型子程序MODELV1和计算波速(或者在$|\rho|>1$时，弹性模量除以密度)和它们的梯度的MODELG1之间的不一致性。

波动Hamilton算子，只有当 $i \leqslant 6$ 情况，才与 w_i 有关。对于 $i > 6$ 情况，可采用更复杂的试验(第 4 节)。

3. 两点射线追踪

3.1 引 言

两点射线追踪算法的输入常常包括下列数据：(1)射线两端点 x_0 和 x_1 的坐标；(2)射线编码 $R(i)$，$i=1$，…，$3R(1)+3$。

射线编码 $R(i)$ 给定通过模型信号的路径和交接面上信号的波型转换。射线编码有如下形式：

$R(1)$	与射线相交的及列在射线编码中的交接面数；
$R(2)$	含有射线原点 x_0 的块体的参考数 l_0；
$R(3)$	初始波的类型 σ_0；
$R(3k+1)$	与射线相交的相继交接面的参考数；
$R(3k+2)$	与射线相交的相继块体的参考数；
$R(3k+3)$	在块体 $R(3k+2)$ 中，信号的波动类型；

且有 $k=1,\cdots,R(1)$。

射线与非物理交接面的交点，在射线编码中可被略去。将它们包括进去要增加数组维数，且在某些情况中(边缘衍射，第3.8节)会引入一些误差。两点射线追踪的输出包括射线的数值给定、走时及沿着输出射线初始值追踪的初始数据。

两点射线追踪问题不需要有单一的解。由于两点射线追踪算法是迭代的，所以输出射线与初次近似射线有关。初次近似射线既可由追踪算法生成，也可包括在输入数据中。在后者情况，被称作为输入射线。

输入射线不需要满足Snell定律。Snell定律的偏离慢慢地在迭代过程中减少。这事实允许一个完全任意的输入射线结构式(3.7)。

两点射线追踪问题是等效于式(2.1)的两点边界值问题。

求解常微分方程组两点边界值问题的迭代方法可分成两类。在弯曲法中(Julian 和 Gubbins, 1975; Pereyra 等, 1980), 在整个迭代过程中，边界条件被满足，而微分方程的偏差在迭代过程中慢慢地减少。投射法，以这样的一种方法，即，使点x_1落在解曲线$\mathscr{J}$上，确定点x_0上$\mathscr{J}$的初始方向。在每一迭代阶段，曲线满足微分方程。下面讨论限于投射法的一些改进。

地震射线的一般两点边界值问题，由于这样的事实而变得复杂化，即射线除了满足微分方程式(2.1)外，还要满足交接面边界条件式(2.2)—(2.4)。从标准两点BVP(边界值问题)(Roberts和Shipman, 1972)的另一方面出发，存在有这样的事实，即曲线参数(走时)的间隔预先是不知道的。这些事实必须使投射法重新提出。

在第3.2节和第3.4节中，提出两种不同的投射法。因而我们要讨论这些基本算法的进一步改进，使适合于处理边缘衍射射线，首波射线及NIP射线。也讨论生成初次近似射线的一些方法。

3.2 平行射线追踪、基本概念

平行射线追踪的方法介于投射法和处理与两点边界条件有相等关系的交接面条件的弯曲法之间。射线可在交接面交点上弯曲，但有限制，要满足每个块体上的适当微分方程。

与此同时，平行射线追踪回避了第3.1节中所提到的其他困难。在两点射线追踪中，信号的走时预先是不知道的，而初始数据被条件$H(x(0), p(0); l_0, \sigma_0)=1$所限制。考虑到均匀性质，波动Hamilton算于有如下形式(Hanyga等, 1984; Hanyga, 1984b)

$$H(x,\theta p)=\theta H(x,p) \quad \theta>0 \tag{3.1}$$

为了从一固定射线原点x_0到达x_1，自由地处理初始慢度的两个方向余弦。在三维模型空间中，到达x_1所必需的第三个自由度由走时提供。在标准两点BVP中(Roberts和Shipman, 1972)，为了到

达x_1，初始慢度的三个分量将在预赋予的时间中处理。

所有上述困难均由两点射线追踪问题的变换，即将它简化到式(2.1)形式的标准两点BVP予以回避的。射线被分割为有限个线段$\mathscr{S}_1$，…，$\mathscr{S}_N$。每一线段$\mathscr{S}_A$代表射线与一个块体相交。根据式(2.1)，每一线段$\mathscr{S}_A$在六维空间$y=(x,\ p)$中当作一条曲线$y^A(t)$。在每一线段参数化变动和重新标定之后，射线在$6N$维空间中，由曲线$z(s)=\{\tilde{y}^1(s),\cdots,\tilde{y}^N(s)\}$来代表，其中$\tilde{y}^A(s)$，$s\in[0,U]$，是$\mathscr{S}_A$新的参数表达式。

参数化的重新标定是必要的，因为曲线$y^A(t)$是定义在变化长度T_A的间隔上。但由于走时T_A预先不知道，这样，重新标定必需要用解除约束$H(x,p)=1$及改变每一线段的慢度矢量的长度来补偿。考虑到式(3.1)，方程式(2.1)对膨胀$p\to\theta p$是不灵敏的，因而关系式(2.1)由Hamilton系统替代，

$$\frac{dx}{ds}=\frac{1}{2}\frac{\partial H^2}{\partial p},\quad \frac{dp}{ds}=-\frac{1}{2}\frac{\partial H^2}{\partial x}\qquad (0<s<U)\quad (3.2)$$

因为H^2沿式(3.2)方程的任何解曲线是常数，所以，如果$t=\text{const}+H_s$，则式(3.2)等效于式(2.1)。除了用改变初始数据代替间隔长度的可能性外，还从H^2的计算比H的计算少一个平方根而获益。

对六维曲线$z(s)=[y^1(s),\ \cdots,\ y^N(s)]$，用非分离边界条件(Roberts和Shipman，1972)将原来的两点射线追踪问题变成相当于标准两点BVP：

$$x^1(0)=x_0\qquad (3.3)$$

$$x^N(U)=x_1\qquad (3.4)$$

$$x^A(U)-x^{A+1}(0)=0\qquad (3.5)$$

$$f(x^A(U);R(3A+1))=0\qquad (3.6)$$

$$\nu\times[H_A(x^A(U),p^A(U))^{-1}p^A(U)-H_{A+1}\times(x^{A+1}(0),p^{A+1}(0))^{-1}p^{A+1}(0)]=0\qquad (3.7)$$

其中$(x(s),p(s))=y(s)$，$H_A(x,p)=H(x,p;R(3A-1),R(3A))$，

ν是在$x^A(0)$处垂直于交接面$f(x; R(3A+1))=0$的单位法线，其中$A=1,\cdots,N-1$。假定每一波动Hamilton算子$H(x,p; l,\sigma)$定义在块体l边界以外，而法线ν定义在交接面$R(3A+1)$的一个邻域中(第1.2节)。

因为式(3.2)定义了$x^A(U)$和$p^A(U)$为$x^A(0)$和$p^A(0)$的函数，所以最后得出一个有$6N+6$个非线性方程的系统

$$F(V)=0 \tag{3.8}$$

其中 $V=[x^1(0) \quad p^1(0)\cdots x^N(0) \quad p^N(0)]^T$

是射线的数值表达。为了减少数组维数，式(3.3)通常考虑为一个约束，且$x^1(0)$从V中消去。在这种情况中，处理$6N+3$个方程和$6N+3$个未知数V。

F的Jacobi算子$DF(V)$，除非对$A\leqslant N$情况，$x^A(U)$落在震源$x^A(0)$的一个焦散点上，否则是可转换的。

3.3 平行射线追踪、式(3.8)问题的迭代解

方程式(3.8)用Polak(1974)算法及联合有局部变化的分割法(Ortega和Rheinboldt，1970)迭代求解。分割法是一种修改过的Newton搜索法

$$V_{r+1}=V_r+\beta^\kappa G_r^{-1}F(V_r) \quad r=0,1,2\cdots \tag{3.9}$$

这里G_r近似为$DF(V_r)$，β是一个满足不等式$0<\beta<0.5$的松弛参数及κ是一列运算整数0，…，$\kappa_0\geqslant0$，直到符合Armijo准则(Bertsekas, 1982)，即

$$|F(V_{r+1})|^2<(1-2\alpha\beta^{\kappa_0})|F(V_r)|^2 \tag{3.10}$$

α是满足不等式$\alpha<\frac{1}{6}$的固定正实数。如果式(3.10)被满足，则V_{r+1}可作为一个新的迭代而接受。如果式(3.10)对$\kappa=0,\cdots,\kappa_0$不被满足，则V_r的最后扰动V_r'式(3.13)；只要它满足如下不等式，也可作为一个新迭代接受，即

$$|F(V_r')|<|F(V_r)| \tag{3.11}$$

（局部变化）。如果$|F(V_r)|<\gamma$，迭代就中止，其中γ是一个数值容许量。考虑到不同几何意义，$F(V)$分量以大小的量级表示不同。为了对误差式(3.5)—(3.7)给予同样的权重，推荐$F(V)$的相应分量用适当的比例尺度因子乘之。

在Polak(1974)算法中，G_r是由初始矩阵$G_0=0$，在算法每一步中用更新G_r的一列而生成：

$$(G_r')_{AB}=\pm[F_A(V_r')-F_A(V_r)]/\varepsilon \qquad A=1,\cdots,\dim V \tag{3.12}$$

且有一个固定的$B\leqslant\dim V$，及由下列按分量方式定义的V_r'

$$(V_r')^A=(V_r)^A \text{ 对于} A\neq B, \qquad (V_r')^B=(V_r')^B\pm\varepsilon \tag{3.13}$$

B值和扰动的±符号周期变化。

除非射线段$\mathscr{S}_A$将震源$x^A(0)$联结到它的焦散点，只要矩阵G_r所有列都不为零，它就是可转换的。第一次转换是迭代的，且它利用G_r成带状结构的方便。在如下的算法步骤中，应用下列公式：

$$G_r'^{-1}=G_r^{-1}-(1-e_B\cdot G_r^{-1}\Delta)^{-1}G_r^{-1}\Delta\otimes(G_r^T)^{-1}e_B \tag{3.14}$$

其中 $(e_B)_A=\delta_{AB}$ 分量形式且有这样事实上的方便，即对某一矢量Δ有$G_r'-G_r=\Delta\otimes e_B$。方程式(3.14)用两边乘上$G_r'=G_r+\Delta\otimes e_B$，很容易得到证明。矢量$\Delta$最多有12个非零分量，因而它允许有一个计算的附加简化。在第3.4节的算法中，Δ最多有6个非零分量。

割线法与局部变化的联合，保证算法是完全收敛。在实际射线追踪问题中，只有用没有松弛($\kappa=0$)的割线步骤，才获得有意义的进展。在算法的典型成功应用中，局部变化一直实行到G_r的所有列都是非零时为止；如下步骤用割线法产生新的迭代。割线法持续失败表示解不存在，虽然在某些情况中，也可能起因于扰动ε与$F(V)$的计算精度不匹配。

在许多情况中，割线迭代减少误差约10—100倍（即原误差的1/10—1/100）。因而CPU时间主要化费在由于需要生成一个毫

不相干的割线矩阵。对于一条与10个交接面相交的射线，$\dim V=63$，且在能应用割线法之前，取63个算法步骤。如果对于每一追踪，初始割线矩阵G_0被设置等于前一个追踪的最后割线矩阵，则在追踪一大族具有类似类型的射线时，每条射线追踪的CPU化费显著降低。在这种情况，第一近似射线V_0取作为前一追踪的最后射线。在没有太有进展情况下，割线矩阵重新被设置等于零。

函数$F(V)$计算一般包括微分方程式(3.2)的积分。对于每一个具有$p=0$或-1的块体，正确解(附录C)代替式(3.2)的积分。正确解公式的应用，使高精度与算法的速度显著提高综合在一起。

3.4 在分段均匀模型中的两点射线追踪

在包含有均匀块体的模型中，一种更有效的算法代替平行射线追踪。它将割线矩阵G_r的阶，由$6N+3$降低到$2N+2$。射线由一条连接起来的折线代表。这条折线由一系列点x^A用直线段联成，$A=1,\cdots,N$。这一系列点以射线原点x_0开始，这原点既可固定的(像在ITH和ITHGEN中)，也允许在一个约束曲面$\mathscr{S}$上移动(如在ITHEX)。后续的一些点x^A代表射线与(物理的)交接面i_A的相继交点。点x^A假定在整个迭代过程中都在交接面i_A上。射线终端x^R既可固定(如在ITHGEN)，也可在约束曲面$\mathscr{R}$上移动。

约束曲面使代表射线矢量V的维数有很大减少。每一个约束曲面(包括交接面，第1.2节)由参数形式$x_k=g_k(\xi,\eta)$，$k=1,2,3$给定，且相应的点x^A用两个参数ξ和η表示。所有可动点x^A的参数ξ，η构成V的分量，代表约束曲面$\mathscr{R}$和$\mathscr{S}$的函数g_k由用户提供的Fortran函数给定。

Snell定律表示为

$$(p_{out}-p_{in})\cdot t_r=0 \quad r=1,2 \tag{3.15}$$

其中t_1和t_2代表交接面的两个线性独立的切向矢量。入射慢度p_{in}和出射慢度p_{out}关系如下

$$p_{in}=C_{in}(x^A-x^{A-1}), \qquad p_{out}=C_{out}(x^{A+1}-x^A) \tag{3.16}$$

其中

$C_{in}=H_{in}(x^{A},x^{A}-x^{A-1})^{-1}$,　　$C_{out}=H_{out}(x^{A},x^{A+1}-x^{A})^{-1}$

及H_{in}和H_{out}代表相应于根据射线编码定出的入射和出射射线段的波动Hamilton算子。

射线终点x^{R}应当与它的目标x_1一致，这一要求由如下两个方程表达：

$$\xi^{R}-\xi_1=0,\qquad \eta^{R}-\eta_1=0 \tag{3.17}$$

方程式(3.17)应用于射线每一可动终点。

方程式(3.15)和(3.17)构成了一个非线性方程组$F(V)=0$。容易看到方程个数总都是等于V的维数（=射线可动点数的两倍）。

非线性系统$F(V)=0$用Polak算法进行迭代求解。只要x^{R}不在x^{1}的焦散点上，Jacobi矩阵$DF(V)$总是带状的，且可逆的。割线矩阵的更新和转换用第3.3节所叙述的方法来控制。基于式(3.15)和(3.17)的算法比平行射线追踪更有效和更健全。如果射线的两个端点被固定在x_0和x_1(第3.7节)，则这种方法有一额外的方便。在这种情况下，误差矢量$F(V)$的所有分量都由同类型表达式(3.15)给定，且不需要进行标定来对比中止准则中的它们的大小量级。

上述算法允许追踪沿平面交接面的首波射线。事实上，如果出射射线段是切于交接面，则Snell定律式(3.15)包含临界入射。但对于首波追踪的一次近似射线构造需要一些说明。下面叙述首波射线如何由前面追踪中所得到的反射射线$\mathscr{R}_1$生成。在第3.7节所叙述的算法不需要追踪一条反射射线。

让x_1代表射线$\mathscr{R}_1$的一个端点，首波射线的目标终点从x_1移动到一点$x_2=x_1+v$。这种算法用一直线段$[x_2,x_2+v']$，在交接面i_0上替代了$\mathscr{R}_1$的反射点x_2。矢量v'由v在i_0上的投影给定。射线编码由三个内容补充：在i_0折射一侧上块体的参考数，$[x_2,x_2+v']$上波的类型及i_0的另一次出现。

3.5 生成一次近似射线的方法

对于两点射线追踪器，生成输入射线V_0的最清楚方法是：以所要求的射线编码和假设的离源方向的射线初始值追踪。初始值射线追踪器，用适合于两点追踪器的矢量V_0，有选择性地表示追踪的结果。

在复杂不均匀或各向异性模型$\mathscr{M}_1$中，两点射线追踪的输入射线V_0也能用在简化模型$\mathscr{M}_0$中，类似两点边界值问题（BVP）求解的方法生成。两个模型的有关交接面必定由连续变形相关联。基于第3.4节所述算法的两点射线追踪器，以适合于平行射线追踪的形式，选择性地表示追踪的结果。在大多数情况，这样一种输入射线保证有满意的收敛。在某些情况，输入射线与最后射线之间的差别是太大了，且从模型$\mathscr{M}_0$转换到模型$\mathscr{M}_1$必须包括中间模型（第3.6节）。

用户之友的两点射线追踪算法不应当要求一条输入射线。在第3.7节中，我们叙述按段均匀模型中射线追踪的一种算法。

在许多应用中，一大族射线被追踪。能用这样的一种方法，对这些射线进行分组，即在同一组内射线是运动学上类似的，也就是在它们的射线编码中所有各项，也许除了波的类型之外，都是等同的。在每一组内射线的合适顺序，使非常有效的射线追踪只要求一或两次割线迭代就达到很高精度。在每一次追踪中，最后射线和最后割线矩阵给出了下一次追踪的输入射线和最初割线矩阵。为了持续地射线追踪，如下输入数据能被改变：(1)一个或两个端点的坐标；(2)在射线编码中的波的类型；(3)数值模型参数。第一种情况发现，在模拟DSS数据、VSP剖面及定常补偿追踪中有许多应用。在第二种情况，得到一对固定点间的相继信号到达的运动学数据。运动学转换包括(3)。

3.6 连 续 法

在许多应用中，在复杂非均匀模型$\mathscr{M}_1$中的射线$\mathscr{R}_1$的平行射线追踪的输入射线$\mathscr{R}_0$,是一个在几何有关的、较为简单的模型$\mathscr{M}_0$中、类似的两点射线追踪问题的解。通常，$\mathscr{M}_0$是有相同或者稍有移动和变形的交接面的$\mathscr{M}_1$的一个按段均匀近似。

假定$\mathscr{R}_0$和$\mathscr{M}_0$的交接面，$i_A, A=1, \cdots, N$，能一一对应地放在$\mathscr{R}_1$和$\mathscr{M}_1$的交接面j_A，$A=1$，$\cdots$，N位置上。即可用不产生或消去交接面交点的方法，将j_A，$A=1$，$\cdots$，N连续变形得到i_A，$A=1$，$\cdots$，N。

根据这些假定，可认为$\mathscr{R}_0$是$\mathscr{R}_1$的一个近似。通常，输入射线$\mathscr{R}_0$保证最好的收敛。偶尔，$\mathscr{M}_1$的不均匀性影响使$\mathscr{R}_0$是$\mathscr{R}_1$的非常粗糙的近似，且收敛性非常差。在这种困难的情况下，有效的连续法(Roberts和Shipman，1972)允许显著的加速追踪。

连续法引进模型伦数$\mathscr{M}_\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant1$。$\mathscr{M}_\theta$的数值资料依赖于$\theta$，对于$\theta=0$及1的情况，模型$\mathscr{M}_\theta$与$\mathscr{M}_0$和$\mathscr{M}_1$一致。更确定些，模型$\mathscr{M}_\theta$可用波动Hamilton算子定义

$$H(x,\ p;\ l,\ \sigma;\ \theta)=[\theta H_1(x,\ p;\ l,\ \sigma)^2+(1-\theta)H_0(x,\ p;\ l,\ \sigma)^2]^{1/2} \tag{3.18}$$

及交接面

$$f(x;\ i;\ \theta)=\theta f_1(x;\ i)+(1-\theta)f_0(x;\ i)=0 \tag{3.19}$$

这里下标0和1相当于模型$\mathscr{M}_0$和$\mathscr{M}_1$。

用连续法进行射线追踪的第一步，射线$\mathscr{R}_0$作为在$\mathscr{M}_{\theta 1}$中追踪的输入射线，其中$0<\theta_1<1$。$\mathscr{M}_{\theta 1}$中的追踪结果提供了模型$\mathscr{M}_{\theta 2}$中追踪用的输入射线，其中$\theta_2>\theta_1$。一个典型θ值系列是0，$\frac{1}{2}$，1或0，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，1。

将参数θ计入计算波动Hamilton算子和它们导数的子程序中，就对两点追踪器提供了连续法的可能性。关于交接面的连续法式(3.19)很少应用，这是由于两点射线追踪器能非常有效地处理强倾斜、弯曲和密实的折皱等复杂交接面。假定由追踪程序调用的模型子程序包括一个公共块/B/IMOD。如果IMOD=0，则要求模型$\mathscr{M}_0$的资料；如果IMOD=1，则模型$\mathscr{M}_1$的资料应当被送回出口。

在二维射线追踪中，连续法的应用由Keller和Perozzi (1983)予以叙述。但不能延伸到三维模型中。

3.7 自主的射线追踪器

在相对简单按段均匀模型中，一次近似射线能由大量地任意结构生成。只要结构与某些输入参数有关，这种方法允许追踪同一个两点射线追踪问题中的几个解(附录G中例3)。

这里，我们叙述应用在射线追踪器ITHGEN中的算法。这种算法允许追踪反射/折射和首波射线（重新定义函数$F(V)$，也能很容易包括边缘衍射射线，参见第3.8节）。输入数据包括两个端点x_0，x_1和一系列交接面的参考数i_1，…，i_N。每一交接面i_A都赋予三个Boolean常数ρ_A，σ_A，λ_A。如果$\rho_A=1$，则射线在i_A上反射；否则折射。$\sigma_A=1$在i_A上引起转换。如果$i_A=i_{A+1}$，则$\lambda_A=1$表示i_A是一个平面交接面，且射线与i_A的两个相继交点应当用在平面i_A上的直线段相联。用j_1，…，j_M代表一系列这种$\rho_A=1$的交接面i_A。

结构与三分量矢量N'有关。算法中采用单位矢量$N=cN'$替代N'，其中$c>0$。线段[x_0，x_1]再被分成$M+1$段，有相等长度，且$y_0=x_0$及$y_{M+1}=x_1$的子线段[y_A，y_{A+1}]。反射点x_A由如下规则确定。如果有方向的线段y_A+sN，与交接面i_A相交，其中$0\leqslant s\leqslant S$，则x_A是与i_A相交的y_A+sN交点中第一个。另外，如果有方向的线段y_A-sN，与i_A相交，$0\leqslant s\leqslant S$，则第一个交点定义为x_A。

如果线段不与i_A相交，则试算失败，计算马上停止。

在下一步中，模块SUBDIV 确定每一有$\lambda_A \neq 1$ 的线段$[y_A, y_{A+1}]$与模型交接面的相继交点。在出口上，由 SUBDIV 得到射线编码和输入射线与物理交接面的交点。

第三步，用参数ξ和η表示交点，且应用第3.4节的算法。

在大多数情况中，这种算法能迅速收敛。像在用样条确定的弯曲面一样，在强倾斜的平面交接面(图 1) 情况中，已经观测到快速收敛(走时误差为10^{-8}量级，只要5—10步分割)。在困难情况时，算法提供应用连续法的可能性。

为了考虑连续法，模块SUBDIV以这样的方法确定一个局部模型$\mathscr{M}_0$，即输入射线在$\mathscr{M}_0$中满足反射定律。模型$\mathscr{M}_0$包括局部给定的，几乎是平面的镜面；略去折射交接面。附加语“局部”表示这样的事实，即从整个范围上说，考虑到在$\mathscr{M}_1$中没有相对应的交接面交点，因而$\mathscr{M}_0$一般是不一致的。

中间模型$\mathscr{M}_\theta$，$0 \leqslant \theta \leqslant 1$，由模型的同伦给定

$$x = g_A(\xi, \eta; \theta) = g(\xi, \eta) - (1-\theta) \times [(g(\xi, \eta) - x_A) \cdot \nu_A]\nu_A \tag{3.20}$$

其中$x = g(\xi, \eta)$是在模型$\mathscr{M}_1$中，含有x_A交接面的参数表达，而ν_A是平行于在x_A点输入射线两边夹角平分线的单位矢量。对于$\theta = 1$，有$g_A = g$，而$\theta = 0$时，与g_A相切的平面与ν_A正交。

3.8 边缘衍射射线的两点追踪

边缘衍射的Snell定律

$$(p_{out} - p_{in}) \cdot t = 0 \tag{3.21}$$

是由如下条件得出的，即入射波和衍射波的程函数，沿着边缘：$S_{in}(x(s)) = S_{out}(x(s))$，与$t = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s$一致。在按段均匀介质中，$p_{in}$和$p_{out}$由式(3.16)给定，而在平行射线追踪中，有

$$p_{out} = \frac{p^{A+1}(0)}{H_{A+1}(x^{A+1}(0), p^{A+1}(0))},$$

$$p_{in}=\frac{p^A(U)}{H_A(x^A(U),\ p^A(U))}$$

方程式(3.21)按这样的要求给予补充，即射线射在交接面 $f(x;\ i_0)=0$ 与辅助的用户给定曲面

$$g(x)=0 \tag{3.22}$$

交线定义的边缘，这个辅助曲面可以是另一个交接面。假定两个曲面横向相交：

$$\nu_1\times\nu_2\neq 0 \tag{3.23}$$

这里 ν_1 和 ν_2 代表各自的法线。

在衍射交接面 i_0 上，式(3.21)和(3.22)，对于平行射线追踪情况，代替式(3.7)；而对于按段均匀介质中的两点追踪情况，则代替式(3.15)。

下面我们叙述两个追踪边缘衍射射线模块的输出：ITID(平行追踪)和ITHDIF(按段均匀模型中追踪)。

输出数据包括沿着最后射线初始值追踪的如下输入数据：射线原点 x_0；初始慢度；以衍射射线进入块体的参考数，及衍射射线的初始慢度 p_d(参见第4.16节有关的DRT中这些数据的使用)。

追踪边缘衍射射线要求小心。由于在两点问题解中的固有误差，用初始值追踪器再追踪的实际射线不射在边缘上。特别，实际射线能与交出边缘的两个曲面中的一个额外相交，这就可能由初始值追踪器引起输入数据的误释。如果 $g(x)=0$ 与一个交接面一致，则DYNTRAC将辅助曲面 $g(x)=0$ 从中断曲面表列中排除，而避免这样的一种误释。

如果衍射射线与交接面相交在衍射点邻域的一点上，则 p_d 值是不可靠的。为此，ITHDIF计算在确定交点过程中固有误差 E。如果衍射射线第一个交接面的交点离衍射点的距离不超过 $10E$，则会发出警告。

在许多实际应用中，在对确定边缘的曲面 $g(x)=0$ 物理性质了解之前，衍射边缘将被找出，且定好位置。曲面 $g(x)=0$ 还能

代表断层面而不能代表模型参数的一个不连续面。在这样情况中，能用一辅助曲面 $g(x)=0$，即不是交接面来确定边缘，从而避免前面两节中所提到的困难。

3.9 边缘追踪

由反射资料确定的交接面来初步定出模型几何形状，并用网格数据的样条内插表示。在这样的一种模型中，衍射边缘由交接面交线构成，虽然它们的精确位置还不知道，但被隐含地确定。为了构成反射和衍射数据之间的关系，可要求用计算机图解法显示衍射边缘。也可要求一个边缘的参数表达式 $x=x(s)$，例如，为了用两点追踪法追踪一族边缘衍射射线的目的。有可能用有关的初始值追踪算法达到这些目的。

$f(x;\ i)=0$和$g(x)=0$的边缘$x(s)$满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=|\nu_1\times\nu_2|^{-1}\nu_1\times\nu_2 \qquad (3.24)$$

其中ν_1和ν_2代表两个曲面的法线，且假定相互交叉。

式(3.24)的初始数据，由确定起始曲面$x=s(\xi,\ \eta)$来求得，此起始曲面横向地与边缘相交。初始点$x(0)$由起始曲面与边缘的交点确定。将Polak算法式(3.3)应用到方程$f(x;\ i)=0$及被限定到$x=s(\xi,\ \eta)$的方程$g(x)=0$中，确定初始交点。所求点 $x(0)$的精度仅仅由在两个或三个切割步中计算f和g的误差所限定。

式(3.24)的积分由INTFINC的某一形式版本。中断曲面包括所有交接面和能与边缘相交的模型范围框表面。边缘点$x(s)$以等间隔弧长值贮存在一系列文件中。

这种算法中有更精细的版本，允许追踪范围框$\mathscr{B}'$中交接面i_0的轮廓线。$\mathscr{B}'$可以与模型范围框$\mathscr{B}$（第1.2节）一致，或者由一些交接面围成(例如断层平面)。算法确定点$x(0)$，而INTFINC追踪i_0与另外一个交接面，或模型范围框表面的交线。INTFINC在交接面或模型范围框表面i_1上获得数i_1和交点 x_1。随后，算法

进行追踪i_0和i_1与初始数据交点x_1。继续轮廓线追踪，一直到循环结束。这种算法对交接面集重复应用，产生一幅表示所有衍射边缘模型的、完全的迹线图(图1)。

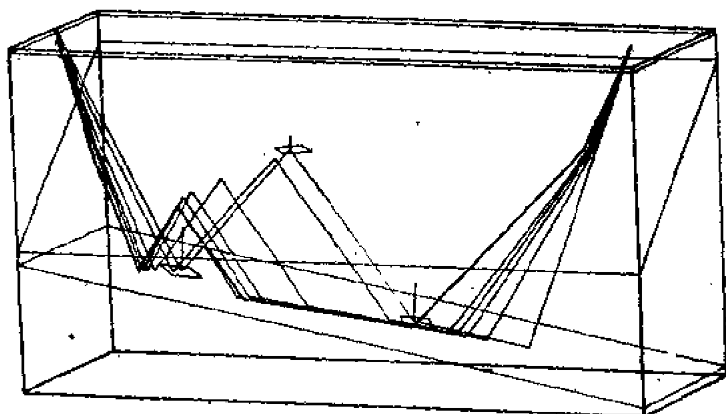


图1　在有强倾斜平面交接面模型中，首波射线的两点追踪。局部模型交接面用小矩形及在入射射线反射点上它们的法线表示。细实线表示迭代计算，而一条粗实线表示最后解。用第 3.9 节的方法得到模型交接面的迹线图

3.10　追踪NIP射线(一般射线追踪)

CMP 堆积结果通常由传到反射交接面i_0，并沿着它们的路径，重新追踪而回到震源的信号来解释。可得出：在反射点，射线正交于i_0。模拟 CMP 堆积数据引出寻求这样的一条射线的问题，即这条射线在一端与给定的反射面i_0正交，而在另一端的给定的投射点x_1上终止。射线编码也就给定。这样的一条射线代表反射后信号的路径。

虽然推广到不均匀模型不会有任何困难，但讨论NIP射线限于按段均匀的模型。追踪NIP射线的算法是第 3.4 节中所叙述算法的改进。除了i_0之外的每一个交接面上，应用式(3.15)。在i_0

处，要加下列方程：

$$(x^2-x^1)\cdot t_r=0 \quad r=1,\ 2 \tag{3.25}$$

其中t_1和t_2代表在i_0处两个线性独立的切向矢量，及$[x^1,\ x^2]$代表临近于i_0的射线段。

在海洋地震中，包含有弯曲的和不规则反射面的CMP堆积资料的解释，常常表示由i_0衍射边缘所反射的NIP射线存在（J. Pajchel，私人通信）。边缘衍射NIP射线，在i_0以外要满足由式(3.15)定义的边界值问题，而在i_0处要加用方程

$$g(x^1)=0 \tag{3.26}$$

$$(x^2-x^1)\cdot t=0 \tag{3.27}$$

边缘用$f(x;\ i_0)=0$与辅助的用户确定曲面$g(x)=0$的交线确定。边缘切线t由两个交接面的法线矢积定出。$g(x)=0$的法线由用户提供的子程序NORG给定。

一条NIP射线的射线编码假定有如下形式：

RC(1)　被射线相交的物理交接面数i_0；

RC(2)＝RC(3)＝0；

RC(3k+1)　交接面参考数(RC(4)＝i_0)；

RC(3k+2)　块体参考数；

RC(3k+3)　波的类型。

两种NIP射线追踪算法都是非常有效和可靠的。它们已在海洋地震的模拟资料中得到应用。

3.11 两点追踪中的走时和走时误差

在平行射线追踪中，走时给定为

$$T=U\sum_{A=1}^{N}H(x^A(0),\ p^A(0)) \tag{3.28}$$

而在射线追踪中，对一各向同性、按段均匀模型有

$$T=\sum_{A=1}^{N}|x^{A+1}-x^A|/c_A \tag{3.29}$$

其中c_A代表适当的传播速度

走时误差按如下公式计算

$$\Delta T=\sum_{k}\sum_{A}\sum_{i}\frac{dT}{dx_i^A}\frac{dx_i^A}{dV_k}(GF(V))_k, \qquad (3.30)$$

这里G代表切割矩阵的最后修正，k是矢量V和$GF(V)$的分量。

3.12 警　告

两点射线追踪器在这样的假设下进行工作，即在整个迭代过程中，射线编码是固定的。这样得出，每一射线段被赋予一个固定的块体参考数。由最后射线几何性确定的实际信号路径能与一不同系列的块体相交。在这种情况中，解是错误的，程序发出一个警告。

在切割中，持续的失败通常表示缺解，但这也可能由模型程序的不良精度引起，或由控制参数的不合适值引起。在按段均匀模型中，射线追踪甚至在模型几何形状复杂情况下也非常可靠。另一方面，在一般非均匀块体中，平行射线的成功与有效性，受控制参数的选择而有强烈的影响。因而推荐，对一给定类型的模型，控制参数的最佳值由运行试验确定。关键参数是扰动步和Hamilton方程积分的容许限量。余下参数能影响计算次数和速度。

4. 动力学射线追踪

4.1 引　言

在DRT(动力学射线追踪)中，要追踪的是如下的量：(1)射线$x(t)$和慢度矢量$p(t)$；(2)射线扩散Jacobi算子$J(t)$；(3)幅度值A；(4)相移α。在点$x(t)$记下的脉冲，只要$x(t)$不位于焦散点的邻近、阴影边界或临界射线，都可用式(1.8)和(1.7)给定。

在焦散点邻近或阴影边界，所记录到的复合脉冲用沿着某些有贡献的射线所追踪的相同量来表示(第 5 节)。

射线扩散 Jacobi 算子和 S 波极性用相应的微分方程积分及交接面上求解边界条件来追踪。幅度A是按段常数，它的值仅在交接面的相交处才有变化。总相移

$$\alpha=\alpha_1+\frac{1}{4}\pi\alpha_2 \tag{4.1}$$

包括在射线与交接面交点上产生的实分量α_1，和射线与焦散处接触点上产生的$\frac{1}{4}\pi$整倍乘子。变量A和α_1专由模块 TRNSFM6进行处理，这相当于解交接面上的边界条件，而整数值α_2在每一个从规则的DRT转换到奇异的DRT时被更新，且反之亦然。

很容易由Hanyga(1988a)方程式(56)得出，在规则区$\alpha_2=2M$是一个偶数。在这种情况中，M是熟知的 Maslov (或叫 KMAH)指数。与KMAH指数不同，整相移α_2在奇异区是与在奇异 DRT 情况下选择的典型变换有关(第4.8节)。

像所说的那样，程序 DYNTRAC 考虑的是一般点源。考虑一个分布源时要作较小的修改(第4.10节)。

为了避免对点源的方向性作更确定的假设，DYNTRAC 假定在震源处，初始数据$A=1$及$\alpha=0$。同样理由，震源处生成的S波初始极性，由用户提供的子程序INPOL给定。

在出口，DYNTRAC记录位置x和慢度p的最后值。这允许继续进行DRT，且也被推荐用在沿着分枝射线路径进行DRT中。对于一条包含有分别追踪两部分的路径，幅度A、走时T及相移α给定为$A=A_1A_2$、$T=T_1+T_2$及$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$。

4.2 连续变化量的DRT

一般地说，射线扩散和 S 波极性用积分相应微分方程组来得到，给定 S 波极性变化的方程讨论在第 4.11 节。另一方面，射

线扩散要求在焦散处邻近(包括点源)作特殊处理。给定射线扩散的微分方程，分成已分别讨论过的三类：规则的、奇异的和线性的 DRT。相应的有效范围，用包括射线扩散和追踪的辅助量的不等式确定。每一类由一个单独的子模块处理。从一类转换到另一类时的追踪量变换，由适当的变换模块执行。

奇异的和线性的DRT在焦散范围，有很好的定义。在这里，我们集中到包括普通焦散点邻近的奇异 DRT 和点源邻近的线性DRT的一种方法；规则的DRT用在其余的范围。只基于线性DRT的一种不同方法在第4.18节讨论。

4.3 规则的DRT、射线中心坐标系

离焦散点的某一距离上，追踪射线扩散的最经济方法是规则的DRT。Hanyga等文章(1984)中，13个方程式(2.3.7)，(2.5.41)和(2.5.42)的基本系统，借助于在射线$x(t)$，$p(t)$邻域上所定义的射线中心坐标系(τ，y_1，y_2)被减少(Hanyga, 1982, 1986)。

控制变量为$I=1$，2或 3 的射线中心坐标系(图2)是由这样关系给定

$$x_k=\sum_{\lambda=1}^{3}{}' P_{k\lambda}(\tau)y_{\pi(\lambda)}\quad k=1,\ 2,\ 3 \tag{4.2}$$

其中一撇表示：$\lambda=I$应当去掉。如果λ是 1，2，3 中较小的数，且不等于I，则$\pi(\lambda)=1$，否则$\pi(\lambda)=2$。矩阵 P_{kl} 用投影算子定义

$$P_{kl}(x,\ p)=\delta_{kl}-\frac{1}{H(x,\ p)}p_l\frac{\partial H}{\partial p_k}(x,\ p) \tag{4.3}$$

上式在($x(\tau)$，$p(\tau)$)处计算。

射线中心坐标系是一个地方曲线坐标系，它在如下条件下，在包围射线$x(t)$的射线管那部分中定义。

$$\left|\frac{\partial H}{\partial p_I}\right|>\varepsilon_2\sum_{i}^{3}\left|\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|\qquad 对某一\varepsilon_2>0 \tag{4.4}$$

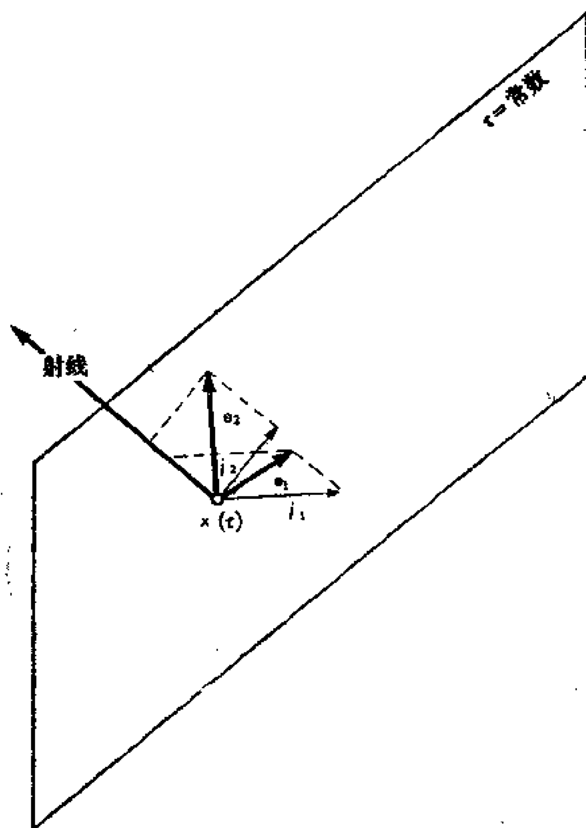


图2　射线中心坐标系。τ = 常数的平面相切于中心射线的波前。$I=3$情况，y坐标的坐标矢量e_1，e_2是坐标矢量i_1，i_2在τ = 常数平面上的投影x_1，x_2：

$$e_a=\Sigma_k P_{Ka} i_k = i_a - p_a(\partial H/\partial p)/H \quad a=1,\ 2$$

(Hanyga, 1984d, 1986)。

与Popov和Pšenčik(1976)所定义的射线中心坐标系不同，式(4.2)适合于各向异性模型。其实，射线中心坐标系的主要性质是坐标平面τ＝常数与波前相切。在各向异性介质中，波前不与射线切线正交。但这与Popov和Pšenčik(1976)的射线中心坐标系正交性相抵触。

式(4.2)的另一个方便存在于这样事实中，即变换式(4.2)由追踪得到的$x(t)$和$p(t)$值在$x(t)$处唯一确定，而在Popov和Pšenčik文章(1976)中，相应的变换要求追踪一个角度φ。除S波追踪外，式(4.2)的这种性质包含求解微分方程。对于S波，φ实质上是S波极性的转动角ψ(第4.11节)。式(4.2)的这种性质由这样的事实产生，即坐标(y_1, y_2)用在τ＝常数平面上两个直角坐标x_i，$i \neq I$唯一地投影确定。

4.4 规则的DRT、变量和方程

在已知方程和变量情况下，射线中心坐标系I最初用这样一种方法选取，即

$$\left|\frac{\partial H}{\partial p_I}\right| \geqslant \left|\frac{\partial H}{\partial p_k}\right| \quad k=1, 2, 3 \tag{4.5}$$

且一旦$|\partial H/\partial p_I|$落到某一数值$\varepsilon_2>0$以下，就马上修改。

波前曲率矩阵$C_{\alpha\beta}$，其中α和β取1，2，定义为

$$C_{\alpha\beta} := \frac{\partial^2 \tilde{S}(\tau, y_1, y_2)}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} = \sum_{k, l} \frac{\partial^2 S}{\partial x_k \partial x_l} P_{ka}(\tau) P_{lb}(\tau) \tag{4.6}$$

且$\alpha=\pi(a)$和$\beta=\pi(b)$，其中$S(x)$代表程函，而$\tilde{S}(\tau, y)$是用射线中心坐标表示的程函的一个表达式。

假定射线追踪方程有形式

$$\frac{dC}{dt} = -CGC - W^T C - CW - K \tag{4.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=J\left(\sum_{i}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}+\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}G^{\alpha\beta}C_{\alpha\beta}\right) \tag{4.8}$$

其中$G^{\alpha\beta}$，$K_{\alpha\beta}$为2×2矩阵及

$$W_{\beta}^{\alpha}=U_{\beta}^{\alpha}+\sum_{\gamma}G^{\alpha\gamma}H_{\gamma}p_{\beta} \tag{4.9}$$

是在Hanyga文章(1982，1984c，1986)中定义的，$H_{\gamma}=\partial H/\partial y_{\gamma}$及$\mathrm{C}=[C_{\alpha\beta}]$。

对于各向同性和横向各向同性介质，G，K和U的给定表达式能在Hanyga文章(1986)的附录中找到。

矢量w_k，$k=1$，…，10由下列赋值给定

$$w_k=x_k,\quad w_{k+3}=p_k\quad k=1,2,3 \tag{4.10a}$$

$$w_{4+\alpha+\beta}=C_{\alpha\beta},\quad w_{10}=J \tag{4.10b}$$

$|J|$是大值时，则变量J用一新的非独立变量L:$J=\mathrm{sign}(J)\mathrm{e}^{L}$表示。由$J$到$L$的变换，或者相反情况会在一中断曲面$|J|=B$上出现，这里$B$是一个大数。

4.5 由$C_{\alpha\beta}$恢复二阶导数$\partial^2 S/(\partial x_i \partial x_j)$

在Hanyga文章(1984c)中，用$C_{\alpha\beta}$表示$S_{ij}=\partial^2 S/(\partial x_i \partial x_j)$的方程式(68)—(71)包含有误差。正确的公式是

$$S_{ab}=\Gamma_{ab}+Ap_a p_b+D_a p_b+D_b p_a \tag{4.11}$$

其中

$$\Gamma_{ab}=C_{\pi(a),\pi(b)}\qquad a\neq I(\text{第}4.3\text{节}) \tag{4.12}$$

$$A=-\sum_{i}^{3}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\bigg/H^2 \tag{4.13}$$

$$D_a=-\left(\frac{\partial H}{\partial x_a}\bigg/H+Ap_a\right)\qquad a\neq I \tag{4.14}$$

$$D_I=-\sum_{a(\neq I)}D_a E_a \tag{4.15}$$

$$S_{Ia}=S_{aI}=Ap_a p_I+D_I p_a+p_I D_a-\sum_{b(\neq I)}\Gamma_{ab}E_b p_I \tag{4.16}$$

$$E_a=\sum_{b(\neq I)} Q_{ab}\frac{\partial H}{\partial p_b}\Big/ H \tag{4.17}$$

$$S_{II}=Ap_I^2+2D_Ip_I+\sum_{\substack{a,\ b\\(\neq I)}}\Gamma_{ab}E_aE_bp_I^2 \tag{4.18}$$

$$[Q_{ab}]=[P_{ab},\ a,\ b\neq I]^{-1} \tag{4.19}$$

这里 I 代表射线中心坐标系的控制变量，且$a\neq I$。

从w_k到$\partial^2 S/\partial x_k\partial x_l$的变换由子程序SECDER完成。

4.6 两射线中心坐标系之间w的变换

非独立变量矢量w，从一个射线中心坐标系I到另一个规则的DRT中、射线中心坐标系I'的变换，是对式（4.11)—(4.19）及(4.6)组成中I用I'进行替代。在线性 DRT 中，非独立变量的变换在Hanyga文章(1987)中给予了推导。

4.7 奇异的DRT、一般注意事项

奇异DRT的主要目的在于避免奇异性，如在式(4.8)中 $J\cdot C_{\alpha\beta}\to 0\cdot\infty$及在式(1.7)中，$J\to 0$。这些奇异性出现在射线与焦散的交点上。为此，在奇异DRT上，变量J和 $C_{\alpha\beta}$ 由它们的有较好特征的等效值替代。当$|J|$下落到一个小数 ε_1 以下时，要发生由规则的DRT转变到奇异的DRT。

当波前曲率值过分大时，$|C_{\alpha\beta}|>B$，在规则的DRT中，要引起积分显著的减慢，这时也推荐用奇异的DRT。与ε_1不同，门值B应当与容量参数有关(附录F)。虽然大值 $C_{\alpha\beta}$ 典型地会伴随小值J，不可能预先建立它们之间的大小关系。

这些考虑得出奇异域如下定义

$$|J|<\varepsilon_1,\ \text{或者}\ \exists(\alpha,\ \beta)\ |C_{\alpha\beta}|>B \tag{4.20}$$

在规则的DRT中，奇异域式（4.20）的边界用四个中断曲面$J=\varepsilon_1\operatorname{sign}J$和$|C_{\alpha\beta}|=B$，$\alpha$，$\beta=1,2,\alpha\geqslant\beta$给定。$J$的符号以一个变量贮存着，且在每经过一个焦散或交接面后，被修改。如果射

线相交在焦散$J=0$处，一个明显地较为简单的中断曲面$|J|=\varepsilon_1$，常常在CHINTR2一个扫描步上两次相交(第 2.1 节)。在这种情况中，焦散和转变到奇异DRT都被漏过了，且最后的相移值是错误的。这种困难是由于在一焦散邻近，J的极快变化所致。

在奇异的DRT中，监视与式(4.20)的边界相交将会付出较高的计算化费，因而已经应用下面的折衷解法。

如果转变到奇异的DRT由与$|J|=\varepsilon_1$的一个交点引起，则$|J|=\varepsilon_1$在奇异的DRT中作为一个中断曲面处理。另外的情况，转变到奇异DRT是由于式(4.20)的第二个不等式引起，且式(4.20)的有效性由子程序OUTPUT以大于积分步的时间间隔进行核对。一旦式(4.20)不满足，就要发生从奇异的DRT出口。

对于一个充分高的门值B，奇异域由式(4.20)的第一个不等式有效地确定，因为波前曲率的破裂仅仅在焦散处有可能。但是，B的降低能减少步长量值减小的数目，这种步长量值减小是由在非线性方程(4.7)中过分限制$C_{\alpha\beta}$的高值引起的。虽然这引起要更多地求助于一个较大的方程组(4.23)，(4.24)。但在某些情况下，CPU化费却能减少。

奇异的DRT与规则的DRT比较，多包含三个附加方程。与中断曲面有关联的函数$f(x;k)$的计算，在奇异的DRT中更为费时。因此，我们认为，只要它的目的被满足，要尽可能地限制奇异域。这一谨慎也减少在奇异域中，因出现一个交接面交点面引起的失败出口的可能。

4.8 奇异的DRT、方程

应用在奇异的DRT中的给定方程，由基本典型变换的控制变量ISING确定(Hanyga, 1984c)。

对于ISING=0，变换是等同的，奇异的DRT等同于规则的DRT，不用借助射线中心坐标系作相应的简化。

如果$0<\text{ISING}=\iota\leqslant3$，则典型变换变成

$$\left.\begin{array}{lll}\tilde{x}_k = x_k, & \tilde{p}_k = p_k & k \neq i \\ \tilde{x}_i = p_i, & \tilde{p}_i = -x_i & \end{array}\right\} \tag{4.21}$$

对于3<ISING$=i<7$，典型变换由下列给定

$$\left.\begin{array}{lll}\tilde{x}_k = p_k, & \tilde{p}_k = -x_k & k \neq i \\ \tilde{x}_i = x_i, & \tilde{p}_i = p_i & \end{array}\right\} \tag{4.22}$$

对于ISING=7，假定在$k=1,2,3$情况时，有$\tilde{x}_k = p_k$和$\tilde{p}_k = -x_k$。

现在是用这样一种方法来定义符号函数$\sigma(K)$和排列$\rho(K)$，即典型变换能用$\tilde{y}_k = \sigma(K) y_{\rho(K)}$形式表示，其中$y_k = x_k$和$y_{k+3} = p_k$ $k=1, 2, 3$；$K=1, \cdots, 6$，Hanyga 文章（1984c）中的方程式(65)和(66)假定有这样形式

$$\frac{d\tilde{C}_{ij}}{dt} = -\sum_{K,L=1}^{6} R_{Ki} H_{KL} R_{Lj} \tag{4.23}$$

$$\frac{d\tilde{J}}{dt} = \tilde{J} \sum_{k}^{3} \sum_{L}^{6} R_{LK} H_{\rho(k+3),L} \sigma(k+3) \tag{4.24}$$

其中R_{Ki}定义为

$$\tilde{R}_{K,i} = \begin{cases} \delta_{Ki} & (K \leqslant 3) \\ \tilde{C}_{K-3,i} & (K > 3) \end{cases} \tag{4.25}$$

$$R_{\rho(K),i} = \sigma(K) \tilde{R}_{Ki} \qquad K=1, \cdots, 6, \ i=1, \cdots, 3$$

$$H_{KL} = \frac{\partial^2 H}{\partial y_K \partial y_L} \quad K, \ L=1, \cdots, 6 \tag{4.26}$$

对称矩阵$\tilde{C}_{ij} = \partial \tilde{y}_{i+3} / \partial \tilde{y}_j$和广义射线扩散Jacobi算子$\tilde{J}$以如下线性顺序：$\tilde{C}_{11}$，$\tilde{C}_{21}$，$\tilde{C}_{31}$，$\tilde{C}_{22}$，$\tilde{C}_{32}$，$\tilde{C}_{33}$，$\tilde{J}$确定非独立变量矢量的7，…，13的分量$w_k$。如果追踪的是S波，则$w_{14}$是极性角$\psi$。

不论何时，都允许奇异的DRT停止，将在进行变换的模块中，设置自变量IOPT=3来限定奇异的DRT在ISING≤3。

4.9 由规则的DRT变换到奇异的DRT

这种变换以在第4.5节中叙述过的、Hanyga 文章（1984c）中方程式(72)得来的$w \to S$变换为基础。控制变量 ISING 用这样一

种方法选定，即假定有关的广义射线扩散Jacobi算子J，在ISING≤IOPT及IOPT＝0，3，6，7条件限制下，是一个最大绝对值。根据Hanyga文章(1984c)中方程式(73)计算Jacobi算子。

由TRNSFM3执行的反变换是根据Hanyga文章(1984c)中的方程式(75)—(77)，随式(4.6)进行的；式(4.6)中的射线中心坐标控制变量I的值借助于式(4.4)确定。

执行变换的模块TRNSFM2和TRNSFM3也根据Hanyga(1984a)的方程式(56)计算整相移。在奇异域上终端的情况，射线进入奇异域之前的总相移值是在出口上获得的。无论已经过，或还没有经过焦散处的信号的相对相移，专门由第5节中提到过的复合脉冲表达式考虑。

在奇异域的终端情况中，刚进入奇异域之前的总相移值在出口上获得。已经到达或还没有到达焦散处的信号的相对相移，由复合脉冲表达式考虑(第5节)。

4.10 线性DRT

虽然点源是一个焦散点，但考虑到特殊的几何性，在它的邻域应用奇异DRT是不方便的。点焦散是一个例外的情况，除非它已由问题的对称性所引起，否则不太会出现。因而它没有包括在Hanyga和Seredyńsk(1988)理论中。

像Červený和Pšenčik(1983)那样，Hanyga(1988)的线性DRT方程被应用在震源的邻域：

$$\frac{dQ}{dt}=WQ+G\Pi \tag{4.27}$$

$$\frac{d\Pi}{dt}=-W^{T}\Pi-KQ \tag{4.28}$$

(注意：在Hanyga(1984c)的方程式(80)中，K的符号是印错的)。

矩阵G，W和K与第4.4节出现的矩阵是等同的。它们与基本的射线中心坐标系的控制变量I有关，而这坐标系由SETIND确

定，且通过公共块/I/被送入计算式(4.27)和(4.28)右边的子程序RHSI中。

2×2矩阵Q和Π给定线性射线追踪的非独立值矢量w：

$$w_{k+2j+4}=Q_{kj}, \quad w_{k+2j+8}=\Pi_{kj} \tag{4.29}$$

式(4.27)和(4.28)的初始数据是

$$p=|p|[\sin\theta\cos\varphi, \ \sin\theta\sin\varphi, \ \cos\theta]^{T}=|p|n \tag{4.30}$$

$$Q=0$$

$$\Pi_{aA}=\sum_{k}^{3}P_{k,\pi^{-1}(a)}T_{kA} \quad a,A=1, \ 2 \tag{4.31}$$

其中

$$T_{k1}=\frac{\partial n_k}{\partial\theta}\Big/H(x, \ n), \qquad T_{k2}=\frac{\partial n_k}{\partial\varphi}\Big/(H(x, \ n)\sin\theta) \tag{4.32}$$

(Hanyga，1984d)是由子模块INDAT产生。

线性射线追踪转变到规则或奇异的射线追踪，由中断曲面$\det Q=\varepsilon_1$确定。

由线性DRT变换到规则的DRT是由子模块TRNSFM1根据如下公式执行

$$C=\Pi Q^{-1} \tag{4.33}$$

$$J=(\det Q)\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{4.34}$$

考虑到式(4.27)，(4.28)和(4.30)，矩阵C是对称的。其实，式(4.27)，(4.28)和(4.30)包含有：$T=Q\Pi^{-1}$满足初始值问题$T=0$，$dT/dt=TKT+TW^{T}+WT+G$，及K和G有严格的对称性。因而在DRT中，$C=T^{-1}$在线性积分精度内是对称的。

式(4.31)，(4.32)和(4.34)包含有：初始射线扩散的Jacobi算子由下式给定，在震源邻域有

$$J=\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\times\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\Big/\sin\theta$$

及

$$x \approx x_0 + \frac{\partial H}{\partial p}(x_0, n(\theta, \varphi))\tau$$

在各向同性介质中，对于$t\approx 0$情况有，

$$J \approx c(x_0)\left|\frac{\partial x}{\partial \theta} \times \frac{\partial x}{\partial \varphi}\right| \Big/ \sin\theta = c(x_0)^3 t^2$$

同时，在出口由DYNTRAC获得的幅度a相当于中心在 x_0 单位球上的初始幅度$a_0=[c(x_0)]^{-1/2}$。

对于一个分布震源，在DYNTRAC中的一系列

call INDAT(…)，call DRTINI(…)，

call TRNSFM1(…)

应当由调用一个产生适当的规则的DRT 初始条件的子程序代替。

唯一根据线性DRT编写的模块DRT将在第 4.17 节中叙述。

4.11 追踪S波极性

S波极性矢量ν，用两个基本极性矢量确定

$$r_1 = |(e\cdot p)p - p^2 e|^{-1}((e\cdot p)p - p^2 e) \tag{4.35a}$$

$$r_2 = |p\times e|^{-1} p\times e \tag{4.35b}$$

(参见Hanyga文章中的(F6—7)式，1986)。辅助矢量e不能(近似地)平行于慢度矢量p。这由POLSET根据如下公式作初始计算

$$\tilde{e}_k = P_{kJ} \quad k=1,\ 2,\ 3,\quad e = |\tilde{e}|^{-1}\tilde{e} \tag{4.36}$$

这里$1\leqslant J\leqslant 3$，且J不等于初始射线中心坐标系的控制变量I。事实上，根据式(4.3)，有$\tilde{e}\cdot p=0$，当$\tilde{e}=0$时，则与式(4.4)矛盾。不论何时，只要$|e\times p|/|p|$跌落在门值ε_3以下，e和p的正交性在追踪过程中，用在e和p决定的平面中转动e来恢复。在追踪通过一个有$p=0$的均匀块体时，仅在应用Snell定律之后，矢量e才被修改。

极性角ψ给定了在传播通过一块简单块体的过程中基本矢量的转动：

$$\left.\begin{aligned} r_1 \to r_1' &= \cos\psi r_1 + \sin\psi r_2 \\ r_2 \to r_2' &= -\sin\psi r_1 + \cos\psi r_2 \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

角ψ满足

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{e \cdot p}{|e \times p|^2}(e \times p) \cdot \nabla c_S \tag{4.38}$$

(Hanyga, 1986)，这里c_S代表S波的速度。在追踪开始通过块体时，将ψ设置等于零。

对辅助矢量e的调节不影响瞬时矢量r_1和r_2，但是要影响由慢度变化引起的这些矢量的转动速度，且使式(4.38)的右边有一不连续。因为对变换过的右边需要计算现行步长的大小，这样，e的调节需要一个积分的瞬时中断。技术上说，这是通过对e调节来等同射线中心坐标变换而获得。(附录F，对非独立变量变换的处理)。

S波极性矢量v给定为

$$v = g_1 r'_1 + g_2 r'_2 e^{i\delta} \tag{4.39}$$

这里实数g_1，g_2和δ在震源处计算（用户提供的子程序INPOL），或在交接面上计算(用SNELLX；第4.13节)。它们在整个块体内保持固定不变，且被贮存在公共块/SPOL/中。

● 式(4.38)右边以Fortran函数ROTRAT的数值得到。当S波正在追踪通过一个块体时，极性角ψ给定非独立值矢量的最后分量。计算微分方程右边矢量的子程序RHSI，RHSR或RHSS在计算最后分量时，调用ROTRAT。

如果射线以S波到达而终止，则在出口S波的到达，用两个单位极性矢量v_1，v_2，幅度a，总相移α和相对相移δ给定。v_1分量的总相移是α，而v_2分量的总相移则是$\alpha+\delta$。

4.12 交接面上的边界条件、运动学变量

在第一步，所有六个出射射线的慢度矢量p_B是由如下方程确定

$$H(x_I, \ p_T+\lambda_B\nu; \ l_B, \ \sigma_B)=1 \qquad (4.40)$$

其中p_T代表在入射点x_I上，切于交接面的入射慢度矢量p^{in}的分量，ν是x_I处交接面的法线，及$p_B=p_T+\lambda_B\nu$在一般情况下，是一个复值。在式(4.40)中，块体参考数l_B假定为两个不同值——一个为反射波，另一个为折射波。不论哪一个l_B值，波的类型数σ_B总在所有三种可能波类型的范围上。

因为对某一l_B固定值，有$\sigma_B=1$，2，3的式(4.40)是等效于一个六次方程(Hanyga等，1984，方程式(2.4.26))，所以方程式(4.40)解的总数是6+6=12。出射波p^{out}由如下条件给定

$$\operatorname{sign}\left(\sum_i^3 \frac{\partial H^{out}}{\partial p_i}(x_I, \ p^{out})\nu_i\right)$$
$$= \pm\operatorname{sign}\left(\sum_i^3 \frac{\partial H^{in}}{\partial p_i}(x_I, \ p^{in})\nu_i\right) \qquad (4.41)$$

其中，只要p^{out}是实的，上面符号对折射波，而下面符号对反射波；否则，要求

$$\operatorname{sign}[\operatorname{Im}(p^{out}\cdot\nu)]=\iota \qquad (4.42)$$

如果波在块体内传播，其法线ν指向块体内部，则有$\iota=1$，反之，则为$\iota=-1$。

方程式(4.41)有一个明显的几何意义。方程式(4.42)表示出射波在局部上按指数衰减。一个简单的几何量(Hanyga，1980；Hanyga等，1984，方程式(2.4.3))表明，式(4.41)约以2的倍数减少方程式(4.40)实值解$p_T+\lambda\nu$的数目。因为式(4.40)复值解λ以共轭复数对出现，所以式(4.42)抵消了复值解的一半。

射线连续性用由射线编码表明的l_B和σ_B值、并考虑到式(4.41)和(4.42)而确定。

在p空间中，$H=1$的曲面，对于P，S，T及QL波是凸状的。事实上，前面两个是球面状的，而第三个是一个椭球面；最快波类型的慢度曲面由一般定理(Courant和Hilbert，1962)知是凸状的。对于一个凸状曲面$H=1$，式(4.40)或者有两个实值解，或者

有两个共轭复值解λ_B。它们中的一个满足式(4.41)或(4.42)。

对于波型QT情况，能存在0，2或(对于$F+2L$显著地不同于A和C；参见(B7))4个实值解λ_B。在最后一种情况中，存在有两个同种类波型$\sigma_B=2$(图3)的出射波，且通常存在两个以QT段起始的射线的不同连续。按实际说法，这引起两条有相同折合编码的不同射线(第4.18节解释如何求解问题)。

4.13 交接面上的边界条件、动力学变量

射线扩散Jacobi算子J的边界条件，由Hanyga文章(1984b)中的方程式(105)给定：

$$\frac{J^{out}}{\nu\cdot(\partial H/\partial p)^{out}}=\frac{J^{in}}{\nu\cdot(\partial H/\partial p)^{in}} \qquad (4.43)$$

(附录D)。$\partial H/\partial p$的上标“in”和“out”表示这矢量分别以p^{in}和p^{out}计算。

入射波波前曲率矩阵$C_{\alpha\beta}^{in}$根据第4.5节，被变换成3×3矩阵S_{ij}^{in}，而出射S_{ij}^{out}，因此由Hanyga文章(1984b)的方程式(100)—(102)计算：

$$\sum_{i,j}^{3}S_{ij}^{out}h_{ia}h_{jb}=\sum_{i,j}S_{ij}^{in}h_{ia}h_{jb}+\sum_{i}^{3}(p_i^{in}-p_i^{out})h_{iab} \qquad (4.44)$$

$$\sum_{j}^{3}\frac{\partial H}{\partial p_j}S_{ij}^{out}+\frac{\partial H}{\partial x_i}=0$$

$$i=1,\ 2,\ 3 \quad a,b=1,\ 2 \qquad (4.45)$$

这里$x=h(s_1,\ s_2)$是交接面参数表达式，$h_{ia}=\partial h_i/\partial s_a$及$h_{iab}=\partial^2 h_i/\partial s_a\partial s_b$；波动Hamilton算子$H=H(x,\ p;\ l_{out},\ \sigma_{out})$的导数在$p=p^{out}$处计算。

在DRT中，交接面由方程$f(x)=0$代表。注意，根据式(4.40)及由恒等式

$$\sum_i^3 \nu_i h_{ia b} = -|\nabla f|^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_{ia} h_{ib} \qquad (4.46)$$

得$p^{in}-p^{out}=[(p^{in}-p^{out})\cdot\nu]\nu$。推导式(4.44)的更方便形式:

$$\sum_{i,j}^3 S_{ij}^{out} h_{ia} h_{jb} = \left[\sum_{i,j}^3 S_{ij}^{in} - (p^{in}\cdot\nu - p^{out}\cdot\nu) \times \sum_{i,j} R_{ij}\right] h_{ia} h_{jb} \qquad (4.47)$$

其中，$R_{ij}:=|\nabla f|^{-1}\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$由模型子程序 MODSGI 提供。因而应用式(4.45)和(4.47)的解(Hanyga, 1984b 中方程式(104))及简化公式(4.6)。

平面波反射/折射系数a_B，$B=1$，…，6，由如下方程确定

$$\left.\begin{aligned} &\sum_B^6 \iota_B a_B r_B = r^{in} \\ &\sum_B^6 \iota_B B(\nu,\ p_B) a_B r_B = B(\nu,\ p^{in}) r^{in} \end{aligned}\right\} \qquad (4.48)$$

其中，r^{in}是入射波单位极性矢量，r_B是出射波p_B的单位极性矢量，对于反射波，$\iota_B=-1$，而折射波，$\iota_B=1$。

入射S波情况，r^{in}根据式(4.39)计算；注意，在出射波幅度表达式中，考虑极性角ψ的最后值；出射S波情况，ψ的初始值是零。

3×3矩阵$B(\nu,\ p)$是p和用弹性模量确定的ν的线性函数(参见Hanyga 等(1984)文章第2.4节的一般解释和给定表达式的附录A和B)。

如果a_B是相应的射线连续的平面波系数，则在公共块/AMPL/中的幅度A和在公共块/PHASE/中的相位α_1，根据如下规则，给予修改

$$A \to A|a_B|\,|J_B|^{-1/2}|J|^{1/2} \qquad \alpha_1 \to \alpha_1 + \arg a_B \qquad (4.49)$$

对于出射S波情况，式(4.48)解由复矢量$a_1r_1+a_2r_2$给出，其中$a_1=g_1 e^{i\gamma}$和$a_2=g_2 e^{i(\gamma+\delta)}$。因而幅度$A$和相位$\alpha_1$根据$A\to A(g_1^2+$

$g_2^2)^{1/2}$，$\alpha_1 \to \alpha_1 + \gamma$规则修改，而$\tilde{g}_1 = g_1(g_1^2 + g_2^2)^{-1/2}$，$\tilde{g}_2 = g_2(g_1^2 + g_2^2)^{-1/2}$及$\delta$贮存在公共块/SPOL/中。

在初始DRT中，动力学边界条件，由对规则的DRT变量进行变换，应用上述的边界条件通过如下变换来得到：

$$Q_{k2}^{out} = Q_{k2}^{in} F, \qquad \Pi^{out} = C^{out} Q^{out},$$

$$F = J^{out} \Big/ \frac{\partial H}{\partial p_t} \tag{4.50}$$

变换式(4.50)与(4.33)和(4.34)一致。它与 Hanyga(1984c)方程式(85)和(86)不一致。为了使与后者方程一致，在 Hanyga 文章(1987)中所推得的方程应代替式(4.50)。

4.14 在DRT中精度和一致性控制

积分精度(用有效数字的位数)像计算传播速度和它们的导数的模型子程序的一致性一样，能用计算运动 $F(w)$的积分，或计算已知恒等式 $F(w, \partial w/\partial t) = 0$ 的左边来核实。下列函数能用DYNTRAC进行有选择的计算：

(1) $H(x, p, t, \sigma)$(正确值为1)，选择IPL＝2或3；

(2) $\Sigma_j \partial H/\partial p_j S_{ij} + \partial H/\partial x_i$，$i=1, 2, 3$(正确值为0)，在奇异的DRT中，选择IOP＝6；

(3) $\int \Sigma_j S_{ij} dx_j/dt - p_i$，$i=1, 2, 3$(预期为一个常数)，在规则的DRT中，选择IOP＝6；

(4) $\int \Sigma_j \partial^2 e_r/\partial x_i \partial x_j dx_j/dt - \partial c_r/\partial x_i$，$i=1, 2, 3$(预期为一个常数)，选择IOP＝$r$，其中，如果 $|\rho| \leqslant 1$，e_1，e_2＝P，S波速度，而e_r为横向各向同性的五个弹性常数 N，L，A，C，F除以$|\rho| > 1$时的密度。

上面(1)允许核对提供传播速度值或弹性常数的模型子程序MODELV1,与提供相同量的梯度值的子程序MODELV1相对照，而(4)允许核对由MODSGE提供的二阶导数值，与由MODELG1得来的它们梯度值相对照。考虑到式(2.1)，(3)的一个常数值等效

于沿着射线的Hamilton-Jacobi方程$H(x,\nabla S(x))=$常数的有效性。

4.15 均匀块体中规则和线性的DRT

用DRT方程的闭型解代替积分，使追踪明显加速。在线性和规则的DRT特殊闭型解中，均匀块体中的曲线由最简单的表达式给定

$$\mathsf{Q}(t)=\mathsf{Q}(0)+t\mathsf{G}(p_0)\Pi(0),\quad \Pi(t)=\Pi(0),$$

$$p(t)=p(0)=p_0 \tag{4.51}$$

(对于初始DRT，考虑到式(4.27)及W=K=0情况)，

$$\mathsf{C}(t)=\mathsf{C}(0)[\mathsf{E}+t\mathsf{G}(p_0)\mathsf{C}(0)]^{-1},$$

$$J(t)=J(0)\det[\mathsf{E}+t\mathsf{G}(p_0)\mathsf{C}(0)] \tag{4.52}$$

(对于规则的DRT，考虑到式(4.51)，(4.33)和(4.34))。

均匀各向同性块体赋值为$\rho=0$，而有垂直/非垂直各向同性轴的均匀横向各向同性块体赋值为$\rho=-2$，和-3。对于这些ρ值，调用模块 CHINTR2 (第2.2节)。弧线由模块DRTICUR或DRTRCUR给定。

对于有传播速度$c(x)=(C+\Sigma_1^3 a_i x_i)^{-1/2}$的各向同性块体，$\mathsf{Q}(\zeta)$，$\Pi(\zeta)$和$\mathsf{C}(\zeta)$闭型公式能这样得到，即将Červený(1987)的方程式(13)，相对于射线坐标进行微商，及应用 Hanyga(1984c)中的方程式(85)和(86)和 Hanyga(1986)中的式(B6)和(B7)。最后的公式引进在附录E中。注意，参数ζ与走时不一致。后者可以作为前者的一个函数，沿着射线进行计算。

4.16 沿着边缘衍射射线的动力学追踪

在这种情况中，输入数据总是由两点射线追踪得到。模块DYNTRAC受通知，射线是边缘衍射的。输入数据包含有衍射边缘的交接面的原来个数j；这个数定出了射线编码中的交接面的顺序。用$f(x;r(3j-1))=0$和$g(x)=0$的交线确定边缘，其中$r(k)$代表射线编码，且$g(x)=0$是一个用户给定的辅助函数。

DYNTRAC不调用任何Fortran函数来计算$g(x)$值。为了应用边缘边界条件，调用两个用户给定的子程序，子程序NORG(X,N)计算单位法线$N=|\nabla g(x)|^{-1}\nabla g(x)$，而子程序SECG(X, S)计算$S_{ij}=|\nabla g(x)|^{-1}\partial^2 g/\partial x_i \partial x_j$。这些子程序，如果在某一交接面$k_1$上，有$g(x)=f(x;k_1)$，则能有效地等效于MODNOR和MODSGE。

除了边缘外，定义在衍射锥上的衍射射线慢度p_d的方向的参数θ给定为：

$$p_d=(p^{in}\cdot t)t+A(\cos\theta n_1+\sin\theta n_2) \qquad (4.53)$$

这里，n_1和n_2分别代表垂直于$f(x;r(j))=0$和$g(x)=0$的单位法向矢量。另外，采用由两点射线追踪(用ITHDIF)所得到的衍射慢度矢量p_d'。在后一种情况，DYNTRAC由式(4.53)的左边以p_d'来计算θ，然后，再用式(4.53)，(4.57)计算p_d。这种谨慎避免误差由两点射线追踪转移到DRT(参见第3.8节)。

衍射波的类型σ_1用折合射线编码给定。

沿着射线，追踪射线扩散J的初始数据由模块INDAT1计算。衍射系数不包括在软件包中。它们可以由用户来提供，那就是将哑子程序DYNDAT由一个幅度乘上衍射系数，对a_2加一相移，及计算衍射S波的极性的子程序代替。特别，根据这样假设，即衍射脉冲按Hanyga(1988)规则计算，在DYNDAT中，衍射系数应当设定等于衍射点上，射线入射的反射/折射系数的绝对值和辐角。

线性DRT的初始数据由下列公式推求：

$$\left.\begin{aligned} &Q_{a2}=0, \qquad Q_{a1}=\sum_j^3 R_{aj}\frac{\partial x_j}{\partial s} \\ &\Pi_{a\alpha}=\sum_j^3 P_{ja}\frac{\partial p_j}{\partial u_\alpha} \qquad a,\alpha=1,\ 2 \end{aligned}\right\} \qquad (4.54)$$

其中$u_1=s$，$u_2=\theta$及

$$x(t,s,\theta)=x(s)+[t-S_{in}(x(s))]\frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\times (x(s),\ p_d(s,\ \theta)) \qquad (4.55)$$

$$p_d(s,\theta)=[p^{in}(s)\cdot t(s)]t(s)+A(s,\theta) \times (\cos\theta n_1+\sin\theta n_2) \qquad (4.56)$$

$$H(x(s),\ p_d(s,\ \theta);\ l_1,\ \sigma_1)=1 \qquad (4.57)$$

$$p(t,s,\theta)=p_d(s,\theta)-[t-S^{in}(x(s))] \times \frac{\partial H}{\partial x}(x(s),p_d(s,\theta)) \qquad (4.58)$$

在这些公式中，H 代表对应于衍射射线波类型和这条射线所进入的块体的波动Hamilton算子，$t(s)$是在边缘点 $x(s)$上，相切于边缘的单位切线，S^{in}是入射波的波前，以及$p^{in}=\nabla S^{in}$是入射慢度。变换系数$R_{aj}=\partial y_a/\partial x_j$由 Hanyga(1986) 的方程式 (B7) 给出。表达式(4.54)是在$t=S^{in}(x(s))$处计算的，这里，$x(s)$是生成边缘衍射射线的射线入射点。

很容易看到，$C=\Pi Q^{-1}$的对称性是等效于$T=Q\Pi^{-1}$的初始对称。因为$T_{ab}=Q_{a1}(\Pi^{-1})_{1b}$及$\Pi_{a2}$，$\Pi_{1}^{-1}$在平面上是正交的，所以对称条件假定有形式：$\Sigma_a Q_{a1}\Pi_{a2}=0$。考虑Hanyga(1986) 的方程式(B10)，左边由式(4.57)知，等于

$$\sum_{i,j}^{3}P_{ij}\frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial p_i}{\partial \theta}=-p_d\cdot tH^{-1}\frac{\partial}{\partial \theta}H(x(s),p_d(s,\theta))=0$$

考虑到本来有的初始数据中的误差，衍射射线不会正确地射中边缘。这常常引起与曲面 $g(x)=0$ 有一个附加的交点。如果$g(x)=0$是一个交接面，则应用Snell 定律，且射线方向受到很大的影响。这个问题，用在现行中断曲面目录中，暂时取消$g(x)=0$的办法，在DYNTRAC中予以避免。

类似的方法可应用到首波和爬行波的DRT中。在前一种情况，首波射线的水平段不会在焦散点上开始，且临界反射之后不需要DRT。

4.17 单一地线性DRT

动力学射线追踪能单一地建筑在线性DRT之上。事实上，式(4.27)和(4.28)在焦散处是非奇异的。不论何时|detQ|跌落到临界水平 $\varepsilon_3>0$ 以下，则就可根据上面的式(4.33)和Hanyga(1984a)的方程式(56)计算相移。当|detQ|在相反方向通过相同的水平时，计算得到同样的相移，而它们之间的差值加到焦散相移$\frac{1}{4}\pi\alpha_2$中。焦散处交点，由给定中断曲面detQ=0来监测。

在线性DRT中，射线中心坐标变换和交接而边界条件的显式在Hanyga文章(1987)中给出。

与规则的DRT相比较，线性DRT包括一个较大的微分方程组的积分(或者，如果闭型解知道的话，计算高维空间中，给定弧线的较大坐标数目)。但对右边的计算包括对相同矩阵G，W和K的计算。线性的和规则的DRT的矩阵方程包括相同数目的2×2矩阵乘数，但规则的DRT要求附加标量和两个矩阵乘积的迹、线性DRT的矩阵解是比波前曲率更容易，但必须牢记住，线性DRT也包括非线性射线方程式(2.1)的积分，不论在哪一种情况，这都要引起积分有一定程度的减慢。

规则的DRT的相对优点在于，它更直接控制有效数字的位数。

4.18 结束语

为了分辨具有非凸形慢度曲面 $H=1$ 的出射波类型的选择中的含糊不清(第4.12节)，模块SNELLX除去了近掠出射波。如果两个可能延续还能保持，则追踪的结果被记在公共块/STOR/中，且追踪沿着这两射线延续又继续地开始。

5. 体波脉冲的计算

5.1 引言、合成地震图的计算

在记录点x_R，合成地震图构成的第一阶段中，为了选择预期会产生较大贡献的射线，要解两点边界值问题。沿着每一条射线进行动力学射线追踪，会得到脉冲计算的三个数值参数：走时T_r，幅度$b_r = c_r a_r$，总相移$\beta_r = \alpha_r + \gamma_r$。幅度$a_r = A_r |J_r|^{-1/2}$和总相移$\alpha_r$由DRT得到，而$c_r$和$\gamma_r$则计及震源方向性，且和射线的初始慢度$p_r$有关。

在所有有关的射线系列内，会存在有些射线组具有相同的射线编码。不同射线编码的贡献用叠加法计入合成地震图中。具有相同射线编码RC的射线贡献，如果它们到时之间的偏移小，则必须被合起来计算。事实上，在这种情况中，点x_R位于RC射线一个焦散点的邻近，且它们的ART幅度a_r的奇异性需要这个脉冲的一致近似估计。因而脉冲由包括所有RC射线的走时和幅度的矢值函数$F(t, x_R; T_1, \cdots, T_n; a_1, \cdots, a_n; \alpha_1)$给定。它们的相移$\alpha_r$之间的差，隐含地由函数$F$计算（Hanyga 和 Seredyńska，1988）。

如果一组具有相同射线编码RC的反射(或折射)体波与它们的边缘衍射部分几乎是同时到达，则会发生相似的情况。在这种情况中，x_R位于围绕RC射线阴影边界的Fresnel衍射区(Hanyga，1988)。

“小的时间偏移”概念能用和要求的脉冲计算精度有关的数值准则表示。事实上，合成脉冲$F(t, x_R; T_1, \cdots, T_n; a_1, \cdots, a_n; \alpha_1)$是弹性动力学方程组的一个一致有效的渐近解。特别在远离焦散处有效，且直接的ART解是F的一个渐近近似。因而，问题中的数值准则与这种近似中的固有误差有关。

为了将这种关系阐述得更清楚，考虑频率域上的场会更方便。对于简单焦散和焦散尖端，场分别给定为

$$c_0\mathrm{Ai}(z)+c_1\mathrm{Ai}'(z) \tag{5.1}$$

及

$$d_0\mathrm{Pe}(z_1,\ z_2)+d_1\frac{\partial\mathrm{Pe}(z_1,\ z_2)}{\partial z_1}+d_2\frac{\partial\mathrm{Pe}(z_1,\ z_2)}{\partial z_2} \tag{5.2}$$

系数c_k和d_k是幅度a_r的线性函数，而z，z_1和z_2是走时的代数函数。Ai和Pe分别代表Airy函数和Pearcey函数。特别，引入简单公式

$$z=-\frac{3}{4}|\omega(T_2-T_1)|^{-2/3} \tag{5.3}$$

对于给定精度$\varepsilon>0$，直接的ART脉冲表达式(1.9)的应用条件，假定为有如下形式(Abramowitz和Stegun，1970)：

$$\left|\mathrm{Ai}(z)-\pi^{-1/2}z^{-1/4}\sin\left[\omega(T_2-T_1)+\frac{1}{4}\pi\right]\right|<\varepsilon \tag{5.4}$$

$$\left|\mathrm{Ai}'(z)-\pi^{-1/2}z^{-1/4}\cos\left[\omega(T_2-T_1)+\frac{1}{4}\pi\right]\right|<\varepsilon \tag{5.5}$$

对于Pearcey函数，也有类似的条件。不等式(5.4)和(5.5)能用$|\omega(T_2-T_1)|\geqslant d(\varepsilon)$，或者更一般用

$$|\omega(T_k-T_l)|\geqslant d(\varepsilon)\quad k\neq l \tag{5.6}$$

表达。

给定由震源发出的频率下限ω_-，并由接收器记录时，只要

$$|T_k-T_l|>d(\varepsilon)/\omega\quad k\neq l \tag{5.7}$$

则就可应用式(1.8)。如果一组具有相同射线编码的射线满足反向不等式，则它们对合成地震图的贡献必定由一合成脉冲表达。

根据式(5.6)对给定射线编码的射线分组，是将简单分类算法编入DYNTRAC中来获得。

5.2 在焦散区合成信号的计算

现简单轮廓性地来叙述一组几乎是同时到达的焦散点，或焦

散尖端领域的合成脉冲的计算（详细的，参见 Hanyga 和 Seredyńska，1988）。

对于每一焦散图形，最大亮区是由这样条件确定，即到达一点，有给定射线编码的射线数 n 是最大值。对于简单焦散点，最大亮区与焦散的振荡侧边一致($n=2$)，而对于焦散尖端，这是在两个简单焦散点之间的楔形区($n=3$，图4—5)。这里所叙述的方法应用到位于最大亮区的接收点上，且假定由沿着所有n条射线，从DRT得来的数据是有效的。将S波情况的定义延后在第5.3节中叙述。

让$\tilde{s}(t)$表示到达焦散点的信号式(1.9)，$\tilde{s}(t)$是离焦散某一距离处、合成信号的渐近分解项中的一项。对一频谱为 $\hat{s}(\omega)$，有限带宽 $\omega_-<\omega<\omega_+$ 的信号 $\tilde{s}(t)$，合成信号能根据如下公式进行计算

$$\mathrm{Re}\int_{\omega_-}^{\omega_+}\mathrm{d}\omega\,\hat{s}(\omega)\,\hat{R}_\delta(\omega,z_1,z_2,\cdots,z_n,\\ b_1,b_2,\cdots,b_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\,\mathrm{sgn}\,\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{5.8}$$

而对于有限时间间隔$t_1<t<t_2$的信号，推荐用

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t'\,\tilde{s}(t')[R_\delta(t-t',z_1,z_2,\cdots,z_n,b_1,\cdots,b_n)\cos\alpha\\ -R_{H\delta}(t-t',z_1,z_2,\cdots,z_n,b_1,\cdots,b_n)\sin\alpha] \tag{5.9}$$

对照第1.1节，这里R_δ代表相互作用的焦散系统的局部响应而不是整个波场。函数$\hat{R}_\delta$，R_δ和$R_{H\delta}$对于简单焦散和焦散尖端情况，显然是可以计算的，而且参数 z_1，…，b_n 是由 DRT 输出数据确定。参数z_1，…，z_n 是由带有一些整系数和在右边带有走时T_1，…，T_n 的对称多项式的代数方程组给定。这个代数方程组用 Powell(1970) 的迭代算法求解。这种迭代在焦散处邻域及离焦散远处都一致收敛。

表达式(5.8)和(5.9)是矢量b_1，…，b_n的线性函数。矢量b_1，…，b_n 按分量形式由右边有矢量 a_{1r_1}，…，a_{nr_n} 的线性方程组

给出，其中a_i和r_i代表由DRT确定的幅度和极性矢量。

5.3 合成S波脉冲计算

对于单一的S波到达，脉冲给定为

$$a(\tilde{s}_1(t)v_1+\tilde{s}_2(t)v_2) \tag{5.10}$$

其中v_1和v_2是两个由DYNTRAC得到的极性矢量（第4.11节），脉冲$\tilde{s}_1$和$\tilde{s}_2$由式(1.8)给出，其中幅度a和相移α及$\alpha+\delta$由式(1.7)，(4.1)和(4.39)给定。

对于合成S波脉冲，必须要考虑椭圆极化。这引导出两套矢量b_1，…，b_n，它们由求解分别带有矢量幅度a_1v_{11}，a_2v_{12}，…，a_nv_{1n}和a_1v_{21}，…，a_nv_{2n}及总相移α和$\alpha+\delta$的相应线性方程组得到(矢量v_1和v_2在第4.11节中给定)。

5.4 在阴影边界上的地震脉冲

在阴影边界上，反射射线或折射射线与它的边缘衍射部分一致。

在阴影边界的邻近，合成脉冲由式(5.8)或(5.9)式用适当地给定的核$\hat{R}_\delta$，R_δ和$R_{H\delta}$给出。$\hat{R}_\delta$用Fresnel积分和它的导数给出，而R_δ和$R_{H\delta}$用基本函数给出。这里，信号$\tilde{s}(t)$是组成合成脉冲的主要波型(根据所考虑的阴影，有直达，反射，或折射波)。焦散衍射出现在将合成脉冲渐近分解成它的组成主分量和边缘衍射分量中。

系数b_1，b_2和z_1，z_2是由沿着反射(折射)和边缘衍射射线DRT所得到的幅度和走时的函数。这个理论也考虑到几乎是同时到达的几条反射和边缘衍射射线(Hanyga, 1988)。

5.5 结 束 语

在计算合成脉冲中，误差的主要来源是在几何走时上。合成脉冲与走时偏移有关(参见式(5.3))。在焦散处或阴影边界的邻

域，走时偏移是用两点射线追踪确定的走时相减而得到的一个小的数值。因而，必须要充分高精度地确定走时，而这种精度与离焦散接收处的距离有关。

附　　录

A. 各向同性块体

各向同性块体（$|p|\leqslant 1$）的波动 Hamilton 算子由如下关系式给定

$$H(x, p; l, \sigma)=a_{\sigma}(x)[p_1^2+p_2^2+p_3^2]^{1/2} \tag{A1}$$

其中a_1和a_2分别代表P波和S波速度（Hanyga等，1984）。

动力学边界条件式（4.48）包括矩阵函数（Hanyga等，1984），有

$$B(\nu, p)=\lambda\nu\otimes p+\mu p\otimes\nu+\mu(\nu\cdot p)E \tag{A2}$$

矩阵G，K和W的显式表达式在Hanyga（1986）文章的附录E中能找到。

B. 横向各向同性块体

各向异性块体允许有下列类型：

（1）横向各向同性块体在x上有各向同性轴 $\nu(x)$；该轴线平行于x^3坐标线的切线$\kappa(x)$（垂直准线，$p=2$）。

（2）横向各向同性块体有各向同性 轴 $\nu(x)=R(x)\kappa(x)$，转动矩阵$R(x)=R_2(\varphi)R_1(\theta)$由下式给定：

$$R_1=(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$R_2(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{B1}$$

如果θ和φ与x无关，则块体类型为$\rho=3$；否则为$\rho=4$。

横向各向同性考虑三种不同的波型。准纵波(QL，$\sigma=1$)和准横波(QT，$\sigma=2$)在某种意义上是P波和SV波的推广。第三种波(T，$\sigma=3$)具有横向极性，也是SH波的推广。强各向异性情况示于图3。

因为$\partial^2 H/\partial x_i \partial x_j$的显式公式，对$\rho=4$情况，是十分复杂的，所以DRT不考虑变化准线。

波动Hamilton算子有$H(x, p; l, \sigma)=G(x, p; v)$，其中$G$是$x$，$p$，各向同性轴$v$及弹性模量$N$，$L$，$A$，$C$，$F$的通用函数。考虑到回转对称性，$G(x, \mathrm{A}p; \mathrm{A}v)=G(x, p; v)$，具有$v(x)=\mathrm{R}\kappa(x)$的横向各向同性块体的波动Hamilton算子$H(x, p; l, \sigma)$能用$\rho=2$型波动Hamilton算子$H^0(x, p)$表达：

$$H(x, p; l, \sigma)=H^0(x, \mathrm{R}^{-1}p) \tag{B2}$$

从(B2)，能推导出几个有用的表达式，例如

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x, p; l, \sigma)=\mathrm{R}\frac{\partial H^0}{\partial p}(x, \mathrm{R}^{-1}p) \tag{B3}$$

或者，对于极性矢量

$$r(x, p; l, \sigma)=\mathrm{R}r^0(x, \mathrm{R}^{-1}p) \tag{B4}$$

将块体类型从$\rho=3,4$减低到$\rho=2$块体类型。(B2)和(B3)中隐含的变换是由模块ROTAT和ROTAT11执行。

$H^0(x,p)$，$r^0(x,p)$，$G(x,p)$和$U(x,p)$是显式表达式(4.7)—(4.9)，在Hanyga文章(1986)的附录G中给出(U_{σ}，相当于Hanyga文章(1986)中的w_0^{σ})。不均匀出射波的极性，由公式确定，即

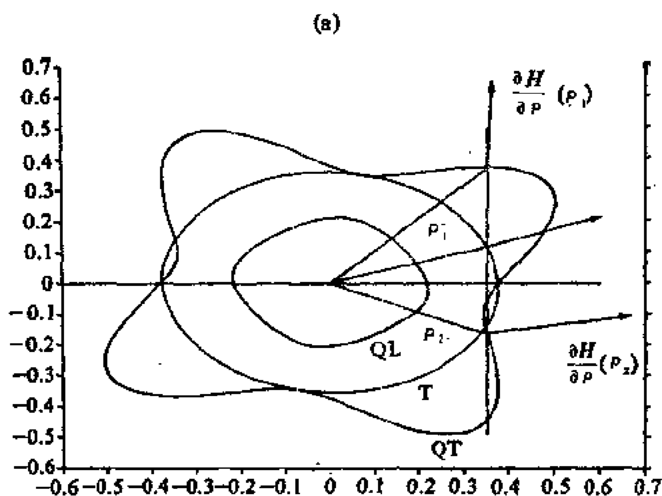
$$r_A^0=M[Rp_1\ Rp_2\ Sp_3], \quad A=1, 2(\mathrm{QL}, \mathrm{QT}) \tag{B5}$$

$$r_3^0=M[-p_2\ p_1\ 0]^{\mathrm{T}}\ (\mathrm{T}) \tag{B6}$$

其中

$$R=H(x, p)^2-L'p^2-(C'-F'-2L')p_3^2$$

$$S=H(x, p)^2-L'p^2-(A'-F'-2L')(p_1^2+p_2^2)$$



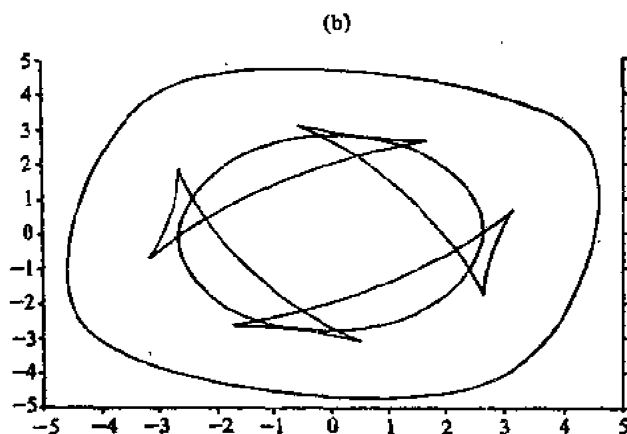


图3 横向各向同性块体中的慢度曲面(a)，及波前(b)。强各向异性情况。QT波的慢度曲面是非凸的，且它的波阵面存在四个尖端边缘，它们位于垂直于各向同性轴的平面上。两条QT射线和一条T射线进入各向异性块体中。入射波不激起任何QL波。$N=7, L=8, A=20, C=22, F=15$

$$L' = \frac{L}{d}, \qquad A' = \frac{A}{d},$$

$$C' = \frac{C}{d}, \qquad F' = \frac{F}{d}$$

d代表密度，而M是归一化因子，它使得 $\bar{r}^0 \cdot r^0 = 1$。在这些表达式中，$\bar{H}(x, p)$代表$H(x, p)$的解析延拓，对于$p_1 = p_2 = 0$ 情况，有$r_2^0 = [0, 1, 0]^T$和$r_3^0 = [1, 0, 0]^T$。

追踪程序假定弹性模量N，L，A，C和 F，除以密度，依此顺序通过公共块/ELV/，在通过块体的追踪中，当$\sigma = 3$时，N，L应当给定，而在$\sigma = 1$，2情况，则要求 L，A，C 和 F。在公共块/ELG/中，应当给定相应的梯度。在交接面上，要求所有五个弹性模量。

从Hanyga文章(1986)的式(G4)中，推得块体类型 $\rho = 2$时的矩阵

$$\mathbf{B}(\nu, p) = \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} Av_1p_1 + Nv_2p_2 + Lv_3p_3 & (A-2N)v_1p_2 + Nv_2p_1 & Fv_1p_3 + Lv_3p_1 \\ (A-2N)v_2p_1 + Nv_1p_2 & Nv_1p_1 + Av_2p_2 + Lv_3p_3 & Fv_2p_3 + Lv_3p_2 \\ Fv_3p_1 + Lv_1p_3 & Fv_3p_2 + Lv_2p_3 & L(v_1p_1 + v_2p_2) + Cv_3p_3 \end{bmatrix}$$

对于$\rho \geqslant 3$情况，$\mathbf{B}(\mathbf{A}\nu, \mathbf{A}p) = \mathbf{A}\mathbf{B}_0\mathbf{A}^{-1}$，$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$。

各向同性块体相当于

$$A = C = \lambda + 2\mu, \qquad L = N = \mu, \qquad F = \lambda \tag{B7}$$

动力学射线追踪要求计算所有出射波的慢度矢量(可能是复值的)。除了QL-QT波外，量式解用在这种情况。对于QL-QT波，从如下四次方程中解出μ

$$(H^2 - m^2A' - n^2L')(H^2 - n^2C' - m^2L') - m^2n^2(F' + L')^2 = 0 \tag{B8}$$

及有$H=1$，$m^2=q_1^2+q_2^2$，$n^2=q_3^2$和$q=R^{-1}(p_T+\mu\nu)$，其中，ν是垂直于交接面的单位法线，p_T是相切于交接面入射慢度的分量。容易看到，Hanyga文章(1986)的波动Hamilton算子H表达式(G6)和(G7)是式(B8)的显式解。

方程式(B8)用 Grant 和 Hitchins(1975)算法求解，而每一个根，对应波的类型，由核对$H(x,\ p;\ l,\ 1)$和$H(x,\ p;\ l,\ 2)$值来确认。

在运动学初始值追踪中，调整归零算法，以固定的波型，被应用到式(4.40)中(模块SLWSOLV)。

C. 各向同性常梯度块体

下列闭型公式应用在通过各向同性块体的运动学射线追踪中，在块体中，传播速度由表达式$c(x)=a+b(z-z_1)$给出

$$c=c(z)=[P\cos h(H_0bs+\Delta)]^{-1} \tag{C1}$$

$$\Delta=-\mathrm{sgn}(p_3^0)\ln|c_0^{-1}P^{-1}+(c_0^{-2}P^{-2}-1)^{1/2}| \tag{C2}$$

$$r=|(1-c^2P^2)^{1/2}\pm(1-c_0^2P^2)^{1/2}|/bP \tag{C3}$$

$$H_0=c_0[(p_1^0)^2+(p_2^0)^2+(p_3^0)^2]^{1/2} \tag{C4}$$

这里，$c_0=c(z_0)$，z_0和p^0代表初始深度和慢度(在$s=0$)，r是射线弧两端点间的水平距离(震中距)，及$P=[(p_1^0)^2+(p_2^0)^2]^{1/2}/H_0$是射线参数。(C3)中的上/下符号，根据$H_0bs+\Delta$的符号取定。

由式(C1)—(C3)给定的解$z(s)$，$r(s)$满足式(3.2)。参数s与走时有关，有公式$H_0s=t$。

D. 式(4.43)的推导

让$\tilde{x}(t,\ u_1,\ u_2)$代表用射线坐标$(t,\ u_1,\ u_2)$表示的射线场。

在Hanyga文章(1984c)的第11节中表明，由射线管包围的波前$t=$常数的面积是

$$\left(\left|\frac{\partial\tilde{x}}{\partial u_1}\times\frac{\partial\tilde{x}}{\partial u_2}\right|\right)du_1du_2=|J||p|du_1du_2 \tag{D1}$$

因为射线切线$\partial H|\partial p$和波前法线p之间的交角φ由下式给出

$$\cos\varphi=\left(|p|\left|\frac{\partial H}{\partial p}\right|\right)^{-1} \tag{D2}$$

根据恒等式$p\cdot\partial H/\partial p=H=1$(Hanyga 等，1984)，射线管的垂直横截面是

$$\frac{|J|}{|\partial H/\partial p|}du_1du_2 \tag{D3}$$

由简单的几何关系，式(D3)隐含有式(4.43)。Hanyga(1984a)的方程式(105)是错误的。

E. 在解析定义的介质中，Π和Q的闭型公式

对于有传播速度$c(x)=(C+\Sigma_i^3 a_i x_i)^{-1/2}$的各向同性的介质，式(2.1)的闭型参数解(Červený，1987)

$$x_i(\zeta)=x_i(\zeta_0)+p_i(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)+\frac{1}{4}a_i(\zeta-\zeta_0)^2 \tag{E1}$$

$$p_i(\zeta)=p_i(\zeta_0)+\frac{1}{2}a_i(\zeta-\zeta_0) \tag{E2}$$

$$t(\zeta)=t(\zeta_0)+c(x(\zeta_0))^{-2}(\zeta-\zeta_0)+\frac{1}{2}\sum_i^3 a_ip_i(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)^2+\frac{1}{12}\sum_i^3 a_i^2(\zeta-\zeta_0)^3 \tag{E3}$$

由Hanyga(1987)得出的，线性DRT方程的闭型解是

$$Q_{\pi(a),\alpha}(\zeta)=\sum_i R_{ai}(\zeta)\left[\sum_{b\neq I}P_{ib}(\zeta_0)Q_{\pi(b),\alpha}(\zeta_0)+(\zeta-\zeta_0)Z_{i\alpha}\right] \tag{E4}$$

$$\Pi_{\pi(a),\alpha}(\zeta)=\sum_i^3 P_{ia}(\zeta)Z_{i\alpha} \tag{E5}$$

及$a\neq I$和

$$Z_{i\alpha}=\sum_{a\neq I}\left[R_{ai}(\zeta_0)\Pi_{\pi(a),\alpha}(\zeta_0)+\frac{c^2}{2}\right.$$

$$\left.\sum_{j}^{3} a_j P_{ja}(\zeta_0) Q_{\pi(a),\alpha}(\zeta_0) p_i(\zeta_0) \right] \quad \text{(E6)}$$

在这种介质中，最简便的追踪法由根据CHINTR2的线性DRT提供。走时是一个附加非独立变量。在$c(x)^{-2}$的线性内插情况中（Červený，1987），模型能用具有$c(x)$的四角形块体给定，$c(x)$连续通过这些在物理上不分成不同块的块体边界。

F. 确定曲线及曲面相交的算法 INTFIND和CHINTR2

INTFIND和CHINTR2算法取决于入口处由整变量INT0所假定的值。如果弧线的初始点w_0位于中断曲面$f(w;k)=0$上，使得SURIND$(k)\neq 0$，则INT0应当赋予k值。对于INTFIND，符号是没有关系的。而对于CHINTR2 sign(INT0)应当等于所期待的$f(w(t);k)$符号。如果初始点w_0，在任何k情况，不位于$f(w;k)=0$上，使得SURIND$(k)\neq 0$，则INT0赋值-100。

下面叙述INTFIND的算法：

如果INT0$\neq -100$，则INTFIND进行到步3。否则，INTFIND校核：在某个k情况，是否有$f(w_0;k)=0$，使得SURIND$(k)\neq 0$；如果结果是否定的，则INTFIND进行到步3，不然就到步2。

在步2，INTFIND执行由小数ε所限步长的一个积分步（推荐一个10^{-6}量级的值，它必须小于块体的线性尺寸），并进行步3。

在步3中，INTFIND用Adams-Bashforth或Gear算法，以可变步长和量级进行积分。计算了下一步步长之后，对于这样的k，有SURIND$(k)\neq 0$时，将$f(w;k)$的符号在积分步的两端作比较。如果发现$f(w;k)$符号相反，则将ARINT(k)设定为1；否则ARINT$(k)=0$。如果至少有一个函数$f(w;k)$使得SURIND$(k)\neq 0$已经改变了符号，则INTFIND转到步5。如果MARK$\neq 0$，则INTFIND转到步4。

如果在现行步中，整变量IPLOT$\neq$0及曲线参数 t 已经超过 $n\times$STEP的值，则INTFIND进行$w(t)$输出(如果 IPLOT=1或3)及控制数据(如果IPLOT=2或3)输出，且积分再继续。

如果t值超过最大允许值T，则INTFIND以 IFAIL=-1而脱出，且得到$w(T)$的值；INT0被设定为-100。

在步 4，如果 MARK$\geqslant$0，则 INTFIND 以 INT=INT0=-100而脱出，或否则调用TRANS(X)，并且转到步3。

在步5，INTFIND调用模块INTRC1。INTRC1 将 $w(t)$在最后积分步内的Hermite 的立方内插(Powell，1981)与调整归零算法(Bus和Dekker，1975)综合在一起，来求得在步3中解得的相交处t的正确值。在出口，INTFIND得到第一个相交的中断曲面$f(w;\ k)=0$的参考数k(在公共块/A/中)，及交点处t和$w(t)$的值；INT0赋值k，且在相交之前sign(INT0)与sign$[f(w(t);\ k)]$相反。

注意，如果弧线连续到$f(w;\ k)=0$的另一侧，则 INT0的值对于下一次调用INTFIND或 CHINTR2 是正确的。在反射时，INT0的符号应由调用程序给予修正。

下面叙述CHINTR2的算法。让w_0是由普通子程序RAY确定弧线$w(t)$的初始点；为了符号简单起见，假定$w(0)=w_0$。

开始时，$T_{min}=0$，如果在入口，INT0=-100，则CHINTR2转到步5；否则转到步1。在步1，用加上T_{max}/KL增加T_{min}，这里K和L代表两个整控制参数，而T_{max}是以 CHINTR2 变量给出的弧线参数的最大间隔长度。如果$T_{min}\geqslant T_{max}$，则CHINTR2以IFAIL=-1而脱出。如果 $|f(w(T_{min});\ |\text{INT0}|)|$小于在函数$f(\cdot;\ k)$计算中引起的误差上限参数$\eta$，则CHINTR2返回到步2；否则转到步 3。

在步3，比较INT0和$f(w(T_{min});\ |\text{INT0}|)$的符号。如果它们是相同的，则CHINTR2转到步4，否则 T_{min} 被设定等于零，L值取双倍，且CHINTR2转到步1。L整溢引起 CHINTR2 以

IFAIL＝6的失败而脱出。注意，所期待的符号，sign(INT0)，$f(w(t);\ |\mathrm{INT0}|)$符号和$f(w(T_{min});\ |\mathrm{INT0}|)$的符号不一致，这可能是由于$0<t<T_{min}$时，弧线$w(t)$与曲面$f(w;|\mathrm{INT0}|)=0$相交之故。

在步4，对使得$\mathrm{SURIND}(k)\neq0$的所有k值情况，将$f(w(T_{min});\ k)$的值都贮存着。如果对某一$k\neq|\mathrm{INT0}|$，使$\mathrm{SURIND}(k)\neq0$及$f(w(0);k)$和$f(w(T_{min});k)$符号相反时，则$\mathrm{ARINT}(k)=1$；否则$\mathrm{ARINT}(k)=0$。如果有某一k，使$\mathrm{ARINT}(k)=1$，则DHINTR2转到步7，否则转到步5。

在步5，整数j设定为0，且CHINTR2转到步6。在步6，j被设定等于$j+1$。如果$j+1>K$，则CHINTR2以IFAIL＝－1而脱出；T的输入值由$T+T_{max}$替代，且得到矢量$w(T_{max})$。另外情况，对于这样的k，有$\mathrm{SURIND}(k)\neq0$，则比较$f(w(T_{min});k)$和$f(w(T_{min}+jT_{max}/K)$的符号。如果它们是相反的，则$\mathrm{ARINT}(k)=1$；否则$\mathrm{ARINT}(k)=0$。如果对某一k，有$\mathrm{ARINT}(k)=1$，则CHINTR2转到步7；否则转到步6。

在步7，调整归零算法应用到所有函数$f(w;k)$中，这样有$\mathrm{ARINT}(k)=1$，且弧线参数在$w(t)$与$f(w;k)=0$的交点上的数值就被确定。CHINTR2以IFAIL＝0而脱出。在出口，T由$T+t_0$替代，其中$w(t_0)$是第一个交点。$w(t_0)$的值也被获得。第一个相交的中断曲面$f(w;k)=0$的参数k，在公共块/A/中获得，而INT0被设定等于k，具有INTFIND中给定的符号。

G. 实　例

下面提出的三个实例，均假定为发生焦散的最简单模型。接收处设置在震源焦散尖端之内。有相同射线编码的三条射线联结震源与接收处，且其中一条是与焦散相切，与一般理论一致(Hanyga，1984b)。三条射线由两点追踪器产生；输入射线由初始值追踪，或由ITHGEN产生。为了确定起见，在每一两点追

踪中，初始切割矩阵$G_0=0$。

例1：由速度梯度变化而生成的焦散尖端(文件MODEL5，图4)

模型由简单的各向同性块体构成，传播速度由渐近到两个常梯度的双曲线确定：

$$dc/dz=0.5,\ 2.0$$

$$c(z)=\frac{1}{2}\{2.5z+2.5+[(1.5z-7.5)^2+0.1]^{1/2}\}$$

模型范围框：$-5\leqslant x\leqslant 40$，$0\leqslant y\leqslant 5$，$-20\leqslant z\leqslant 20$

震源：(0，2，0)；接收处(23.3，2，−8)

初始慢度：

射线1：(0.132206470556，0，0.149893938273)

射线2：(0.143371460198，0，0.139252892209)

射线3：(0.049340640761，0，0.193680780557)

射线1在(11 5214335，2，4.7423695)处相切于焦散

幅度：2.6769×10^{-3}，2.3773×10^{-3}，1.7898×10^{-3}

走时：6.95136 ± 10^{-8}，6.94390 ± 10^{-8}，6.59704 ± 10^{-9}

相位：$-\frac{1}{2}\pi$，0，0

极性：(P波)

(0.13238，0，−0.99120)，(0.14356，0，−0.98964)，(0.04940，0，−0.99877)

初始数据由运行ITIL产生。输入射线由运行TRGRDC产生，其中离源角为$(0.23\pi,\ 0)$，$(0.255\pi,\ 0)$和$(0.08\pi,\ 0)$。容许量$\gamma=10^{-14}$。

迭代数：2次失败＋2次成功，2，3

2例：反射面是凹向上的(文件MODEL8，图5)

模型由两个均匀块体构成。射线包含在上面块体中，并且没有转换的反射。上面块体的传播速度是3.5，密度是1.0。

模型范围框：$-10\leqslant x\leqslant 20$，$0\leqslant y\leqslant 20$，$0\leqslant z\leqslant 20$

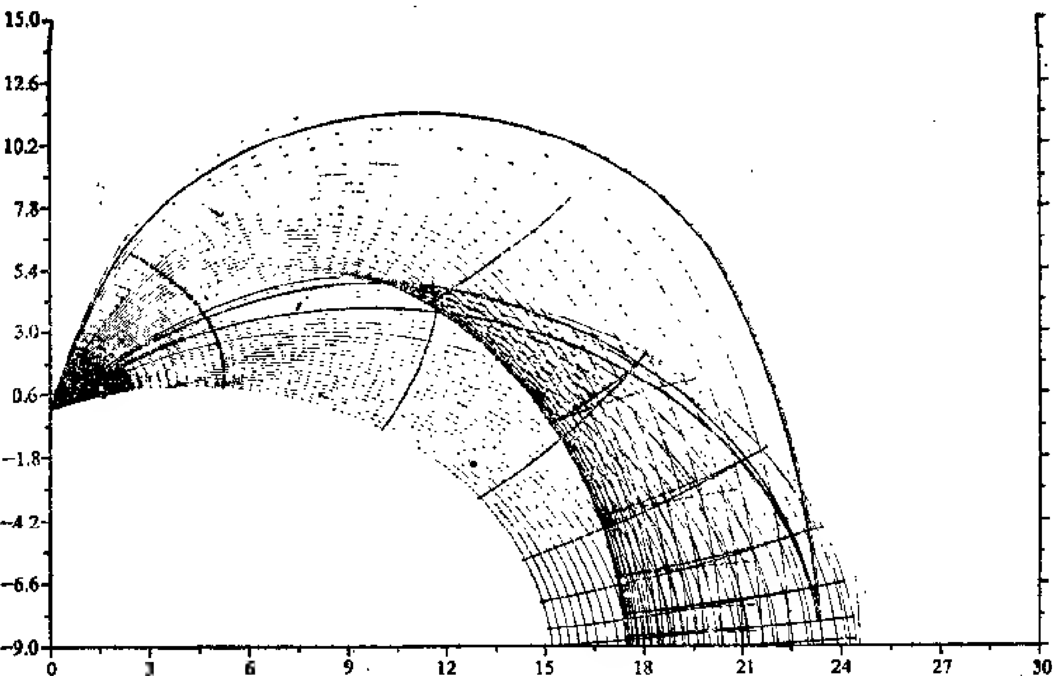


图4　实例1。粗实线表示的射线1，2，3对细实线表示的射线场。虚线表示波前。注意，在两个焦散点处，波前的无限曲率，射线1对焦散处的切点(用DRT确定的)用×号表示

交接面：$z=0.01(x-10)^3+0.05(x-10)^2+5$

震源：(6，2，16)，接收处：(5.12，2，19.5)

初始慢度：

射线1：(0.167909902680，0，－0.231168591386)

射线2：(0.276854607265，0，－0.070598721643)

射线3：(0.006076681326，0，－0.285649657807)

射线1在(11.3788916，2，9.1369231)处与焦散相切。

幅度：1.9594×10^{-3}，2.9052×10^{-3}，1.6535×10^{-3}

相移：$-\frac{1}{2}\pi$，0，0

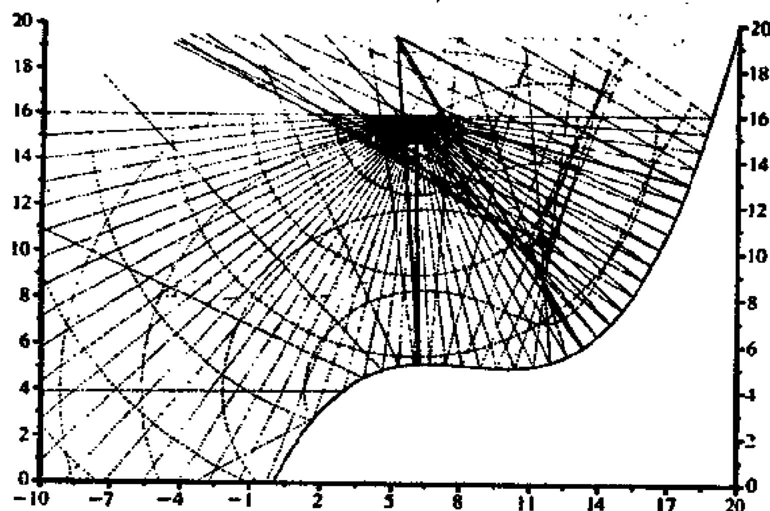


图5　实例2。粗实线表示的射线1，2，3对细实线表示的波场。虚线表示波前。射线1对焦散处的切点用×号表示

走时：8.09316 ± 10^{-4}，7.59275 ± 10^{-6}，$7.19878\pm3\times10^{-17}$

极性：(－0.51699，0，0.85599)，(－0.89014，0，0.45566)，(－0.07724，0，0.99700)

初始慢度矢量用运行具有容许量$\gamma=10^{-12}$的 ITH 得到。输入射线用运行TRHOM21产生，其中离源角$(\theta, \varphi)=(0.8\pi, 0)$，$(0.67\pi, 0)$，$(0.97\pi, 0)$。

切割迭代次数：1，5，3；初始切割矩阵：0。

例3：边缘衍射射线的焦散尖端（文件MODEL4，图6）

模型由两个均匀块体构成。块体2由不等式$f(x;k)<0$，$k=1, 2$给定。交接面$f(x;2)=x=0$及$f(x;1)=z-0.01(y-10)^3-0.05(y-10)^2-5=0$在边缘$\mathscr{G}$上相交。

射线包含在块体1中（速度是3.5）。

震源：(−9，3，19)；接收处：(8，3，19)

初始慢度和边缘衍射相的初始慢度（由两点追踪确定）：

射线1：(0.135591244775，0.168425968687，
−0.186762845538)
(0.119473998569，−0.181890748171，
0.185133390984)

射线2：(0.153543809397，0.038667633446，
−0.237827176287)
(0.139362029343，−0.056903446602，
0.242843314925)

射线3：(0.139811274652，0.232880271070，
−0.088612865249)
(0.121785223959，−0.243434704911，
0.086836379077)

射线1在(2.20928，10.81596，10.02687)与一焦散相切。

幅度：7.3231×10^{-2}，5.0386×10^{-2}，1.1159×10^{-1}

相位：$-\frac{1}{2}\pi$，0，0

走时：10.88458 ± 10^{-16}，9.47099 ± 10^{-9}，10.061730 ± 10^{-14}

极性（P波）：

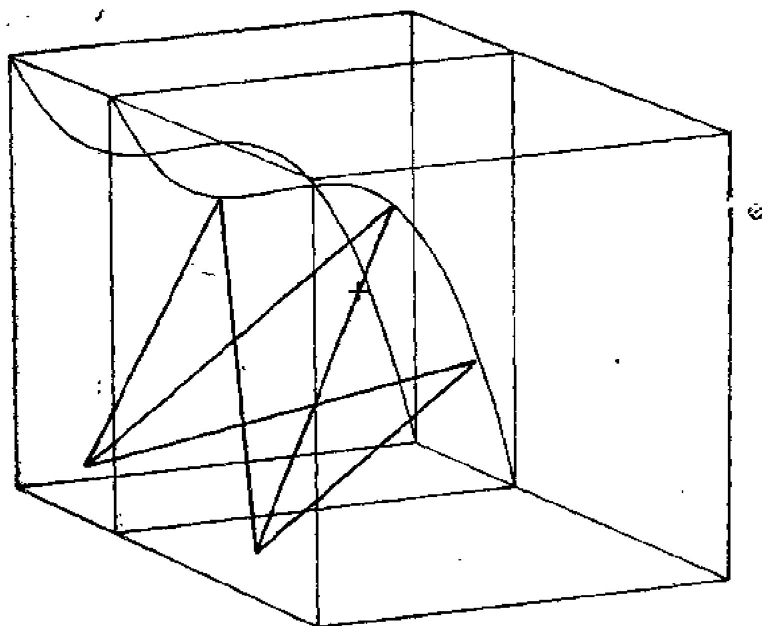


图6 实例3。粗实线表示的射线1，2，3对细实线表示的射线场。虚线表示波前。射线1对焦散处的切点用×号表示。焦散尖端由一弯曲的衍射边缘产生

(0.41816, −0.63662, 0.64797),

(0.48777, −0.19916, 0.84995),

(0.42625, −0.85202, 0.30393)

初始数据用运行具有$\gamma=10^{-13}$的ITHDIF得到。输入射线用运行独立存在的追踪器ITHGEN产生，其中端点在(−9, 3, 19), (5, 3, 19)，在$f(x;1)=0$上产生三条反射射线。为了得到三个不同的解，选择如下三个"投射矢量"N'(第3.7节)：(0, −1, 1), (0, 1, 1), (0, −2, 1)。容许量是$\gamma=10^{-9}$。

切割迭代次数：ITHGEN：2, 4, 5；ITHDIF：5, 2, 2。

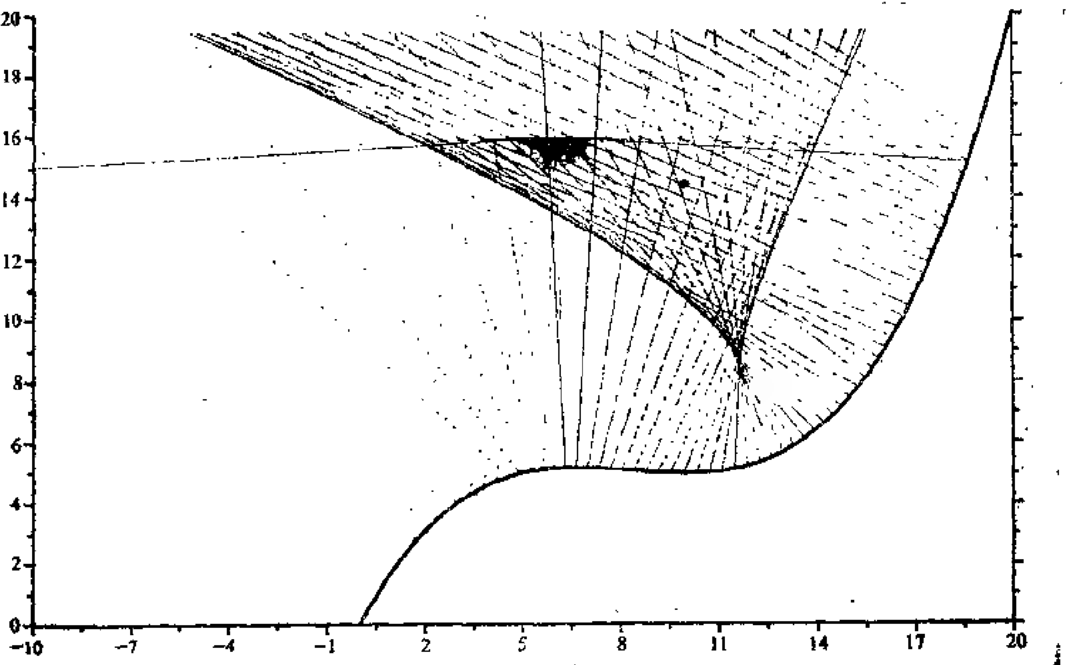


图7　细实线表示用DRT确定的焦散尖端。它与射线场的廓线一致。模型和震源位置如图5

第　三　篇

层状介质中的反射率法

第一章　地震波场的系统近似方法

B.L.N.Kennett

(澳大利亚国立大学地球科学研究所)

1. 引　　言

在理论地震图计算的近期工作中，大多数重点都放在由任意震源在层状介质中激发出的完全响应结构上。关于源的激发问题，有许多形式上等效分析方法。这些方法都变成许多构成频率/波数域响应的计算机算法，紧接着对波数积分及 Fourier 合成，来得出不同空间位置上的一系列地震图。Kennett(1983)、Chapman和Orcutt(1985)给出一套结合参考文献的近期评述。许多有效的方法只能给出完全的响应，但基于用介质的反射与折射性质表达的物理基本方法，有可能提取波场某些部分的近似(Kennett和Kerry，1979)。

与此相反，广义射线法只应用了地震波场的有限的近似，其注意力集中在地震图很小的部分或者是主要震相特征上。对于均匀层叠成的模型，可用Cagniard技术(Helmberger和Harkrider，1978)。若在层叠中有足够的多次反射，则可得到很好的结果，由 Chapman(1978)介绍的WKBJ技术提供了一个可应用于缓变速度剖面的经济方法。这是一个估算波场主要特征的极好方法。但对近掠入射或有阴影区存在时，与界面作用的波的WKBJ结果会有很大的误差(Chapman和Orcutt，1985)。这些广义射线方法与完全弹性假说有关，且模型的衰减影响不得不由每条射线的响应与平均衰

减算子进行褶积来计入。假如希望以地壳多次反射计入这种特征，则必须给出每一类型的可能射线路径，同时失去了某些计算上的方便。

为了许多目的，希望对衰减介质中地震波场的许多部分能给出系统近似，这类最早的近似法是 Fuchs和Müller(1971) 用过的——原始“反射率法”，方法中介质一部分的完全响应与从源出发向下及向上到达接收点的简单传递相位延迟相耦合。这种方法已经得到很广泛的应用（Chapman和Orcutt，1985)。且仔细选择反射区，可得到表面反射并不重要处的很好结果。

然而，许多情况下波场与自由表面的作用对形成地震图的特征起主要作用。作为一个例子，可考虑计算距离为1700—3000km范围内的短周期地震图。虽然由于上地幔各水平层返回的能量干涉使体波占优势，但地表反射及地壳的多次反射有很大的贡献，致使地震图复杂化。为摆脱传播过程的细节，应该在计算中控制波型与多次反射波型之间的相互转换。用成层部分的反射和折射响应在频率域/慢度域的工作可达到这个目的。这些结果适用于积分到空间域，既可以实轴慢度积分(由Fuchs和Müller工作中导出的“反射率法”1971)，也可作慢度数值曲线积分(如见Cormier和Richards的“全波理论”1977)。

将要提出的一些算法，部分是从Kennett(1983)书的第九章层状介质的响应的近似处理中得来，但也结合些Kennett(1986) 文章中关于波型之间转换的有用结果。采用Kennett(1983)(用K83代表它)用过的符号，且对积分步骤不作详细讨论(如K 83的第七章)。

2. 地震波的反射和折射

用反射项和折射项来建立地震波场的近似，因面必须对这些量给定习惯的规定。

按K 83，应用不变量的嵌入法，即当考虑从区域 $z_A \leqslant z \leqslant z_C$

反射时，将它嵌入两个均匀半空间中，而在 z_A 和 z_C 处其性质连续。在这些均匀介质内，通过本征矢量分解，可将地震波不含糊地分解成向上分量和向下分量（K 83 的第 3，5 章）。当一般下行场在z_A处入射在区域(z_A, z_C)上，则在z_A的上行反射波用反射矩阵$\mathbf{R}_D^{AC}$描述，而在z_C处的下行折射波用折射矩阵$\mathbf{T}_D^{AC}$描述。如果介质是各向同性的或具有垂直对称轴的横向各向同性的，则波的传播过程分成为两部分。

(i)耦合的P-SV波有2×2反射矩阵和折射矩阵，例如

$$\mathbf{R}_D^{AB}=\begin{bmatrix} R_{PP} & R_{PS} \\ R_{SP} & R_{SS} \end{bmatrix}_D^{AB} \tag{1a}$$

这里(例如)反射系数R_{PS}表示入射SV波产生的P波。

(ii)SH波有单个的反射系数R_{HH}和折射系数T_{HH}。

Booth和Crampin(1983)，Fryer和Frazer(1984)已指出，如何将所有三种波型间的可能耦合并到3×3矩阵的方法用来扩展到处理各向异性介质。

当在z_C处有入射上行波，则此处的下行反射波由反射矩阵$\mathbf{R}_U^{AC}$描述，而在z_A处的上行折射波用$\mathbf{T}_U^{AC}$描述。

一个更重要的反射情况，即以自由表面$z=0$为上边界的区域$(0, z_E)$。在这种情况下，用$\mathbf{R}_U^{fE}$代表在z_E处由于入射上行波产生的反射矩阵，上行波在自由表面也产生位移，可用矩阵$\mathbf{W}_U^{fE}$表示，在这种情况下，它类似于折射波项。该矩阵的每一行对应于一种类型的入射波所激发的特定分量值。因此，当P-SV波入射在Z_E平面时，表面位移矩阵有如下形式

$$\mathbf{W}_U^{fE}=\begin{bmatrix} W_{UP} & W_{US} \\ W_{VP} & W_{VS} \end{bmatrix}_U^{fE} \tag{1b}$$

这里，例如，W_{UP}是z_E处入射P波所生成的表面位移的垂直分量，而W_{VP}是相应的水平分量。

从表达介质响应的观点来看，反射项和折射项的最重要性质出现在区域裂开时。考虑将区域(z_A, z_C)在z_B处断裂，原始的反射

和折射矩阵与子区域中的反射和折射矩阵有关，由下面表示(K83的方程式(6.3)和(6.4))。

$$\left.\begin{aligned}T_D^{AC}&=T_D^{BC}[I-R_U^{AB}R_D^{BC}]^{-1}T_D^{AB}\\ R_D^{AC}&=R_D^{AB}+T_U^{AB}R_D^{BC}[I-R_U^{AB}R_D^{BC}]^{-1}T_D^{AB}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

和

$$\left.\begin{aligned}T_U^{AC}&=T_U^{AB}[I-R_D^{BC}R_U^{AB}]^{-1}T_U^{BC}\\ R_U^{AC}&=R_U^{BC}+T_D^{BC}R_U^{AB}[I-R_D^{BC}R_U^{AB}]^{-1}T_U^{AB}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

这里I是单位矩阵。一旦鉴别出式中的逆矩阵项有相当于AB和BC之间连续内部多次反射混响算子的特征时，则从右至左阅读这些表达式可判明其物理意义。因为

$$[I-R_U^{AB}R_D^{BC}]^{-1}=I+R_U^{AB}R_D^{BC}+R_U^{AB}R_D^{BC}R_U^{AB}R_D^{BC}[I-R_U^{AB}R_D^{BC}]^{-1}\quad(4)$$

以及继续展开得出更高次的混响项。

可在不同的点截取混响算子来得到反射及折射矩阵的一系列近似式。一般用最方便的形式，即用单位矩阵替代算子。这样在AC内不留下混响项，或是数值地对矩阵求逆，因而计人全部混响项。在一个作用项之后截断(4)式，即保留$I+R_U^{AB}R_D^{BC}$，它能包括部分内反射，计算成本稍低于包括全部内反射所构成的$[I-R_U^{AB}R_D^{BC}]^{-1}$计算。

如果再细分延伸到自由表面的区域，在z_D处断裂，则应用同样的规则(K 83的方程(6.9)和(6.10))。

$$\left.\begin{aligned}R_U^{fE}&=R_U^{DE}+T_D^{DE}R_U^{fD}[I-R_D^{DE}R_U^{fD}]^{-1}T_U^{DE}\\ W_U^{fE}&=W_U^{fD}[I-R_D^{DE}R_U^{fD}]^{-1}T_U^{DE}\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

位移矩阵W_U^{fF}表现在自由表面本身上有位移转换的折射项特征。Müller(1985)正确地进行这样一种分解，因而使

$$W_U^{fF}=\widetilde{W}T_U^{fE}$$

这里T_U^{fE}是高到自由表面的折射矩阵。$\widetilde{W}$是在自由表而本身上的位移转换矩阵(K 83，方程(5.69)，它包括反射的放大效应)。

$$\widetilde{W}=M_{U0}+M_{D0}\widetilde{R}$$

这里M_{U0}和M_{D0}是与表面性质相同的均匀介质中，由上行和下行波

产生的位移分量的矩阵，而$\tilde{R}$是在自由表面本身上的反射矩阵。

注意，自由表面存在时的矩阵关系式(5)与两边都有半空间夹着的区域的矩阵具有严格相同的结构。因而可以设计一个计算方案，方案中能随意地包括或不包括自由表面的反射，这用给定$z=0$平面上的边界条件来实现。由设置反射矩阵$\tilde{R}$等于零，直接得到透明上边界的结果。然而，能用维持$\tilde{W}$的办法来维持位移放大效应，而不仅仅应用上行波的矩阵M_{U0}。

当介质由许多均匀面组成时，方程式(2)和(5)构成有效循环系统的基础，用于计算具有控制内部多次反射的反射矩阵和折射矩阵。这已在附录中叙述。Kennett和Illingworth(1981)已经小心地指出，对于梯度带也能用类似的方案。

如果反射矩阵和折射矩阵的非对角元素不为零，则对于P-SV波(或完全各向异性)，方程式(2)，(3)和(5)包含有波型之间的耦合。这些转换项通常都是比较小，除非区域内含有地震参数有大跳跃的材料交接面。在引进波型之间的转换时，自由表面也很有影响。但一般说来，要求P→S→P双重转换的任何过程则相对地不太有效，对波场不是主要贡献者(源和接收点都在液体覆盖层时，大多都要除外)。因而考虑P-SV波的混响项

$$[I-R^A R^B]=\begin{bmatrix}1-R^A_{PP}R^B_{PP}-R^A_{PS}R^B_{SP} & -R^A_{PP}R^B_{PS}-R^A_{PS}R^B_{SS}\\ -R^A_{SP}R^B_{PP}-R^A_{SS}R^B_{SP} & 1-R^A_{SS}R^B_{SS}-R^A_{SP}R^B_{PS}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}X_{PP}-Y_{PP} & -Y_{PS}\\ -Y_{SP} & X_{SS}-Y_{SS}\end{bmatrix} \qquad (6)$$

这里$X_{PP}=1-R^A_{PP}R^B_{PP}$和$X_{SS}=1-R^A_{SS}R^B_{SS}$，它们的倒数将是无波型耦合的混响运算子。P和$S$在$Y_{PS}$，$Y_{SP}$中与一次转换有关，在$Y_{PP}$，$Y_{SS}$中与二次转换有关，Kennett(1986)已经指明，只要求用对角元素的倒数$(X_{PP}-Y_{PP})^{-1}$，$(X_{SS}-Y_{SS})^{-1}$的方式，就能得到式(6)的分块倒数。这些表达式比较复杂，但若略去全部二次转换，就能大大简化而给出一个近似算子

$$[\mathrm{I}-\mathrm{R}^{A}\mathrm{R}^{B}]^{-1}\approx\begin{bmatrix}X_{PP}^{-1} & X_{PP}^{-1}Y_{PS}X_{SS}^{-1}\\ X_{SS}^{-1}Y_{SP}X_{PP}^{-1} & X_{SS}^{-1}\end{bmatrix} \tag{7}$$

其中仅保留相当于单一波型的混响。当相继转换之间的时间延迟很长时，这种近似是合理的。然而，当许多震相在时间上紧挨着到达，则必需用完全逆。对于各向异性耦合，能推导得到，类似于式(7) 表达式，它是3×3矩阵(Kennett, 1986)。

对于混响算子应用近似式(7) ，来建立有转换限量的反射和折射系数的简单近似。

考虑有如下形式的总的折射矩阵

$$\mathrm{T}=\mathrm{T}^{B}[\mathrm{I}-\mathrm{R}^{A}\mathrm{R}^{B}]^{-1}\mathrm{T}^{C}, \tag{8}$$

这里，例如，T^{C}代表T_{D}^{AB}型矩阵，有一次转换的折射系数是

$$\left.\begin{aligned}
T_{PP}&=T_{PP}^{B}[1-R_{PP}^{A}R_{PP}^{B}]^{-1}T_{PP}^{C}\\
T_{PS}&=T_{PS}^{B}[1-R_{SS}^{A}R_{SS}^{B}]^{-1}T_{SS}^{C}+T_{PP}^{B}[1\\
&\qquad -R_{PP}^{A}R_{PP}^{B}]^{-1}T_{PS}^{C}\\
&\quad+T_{PP}^{B}[1-R_{PP}^{A}R_{PP}^{B}]^{-1}(R_{PS}^{A}R_{SS}^{B}\\
&\quad+R_{PP}^{A}R_{PS}^{B})[1-R_{SS}^{A}R_{SS}^{B}]^{-1}T_{SS}^{C}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

对于反射矩阵

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}^{C}+\mathrm{T}^{A}\mathrm{R}^{B}[\mathrm{I}-\mathrm{R}^{A}\mathrm{R}^{B}]^{-1}\mathrm{T}^{C} \tag{10}$$

仅有一次转换的相应反射系数是

$$\begin{aligned}
R_{PP}&=R_{PP}^{C}+T_{PP}^{A}R_{PP}^{B}[1-R_{PP}^{A}R_{PP}^{B}]^{-1}T_{PP}^{C}\\
R_{PS}&=R_{PS}^{C}+T_{PP}^{A}R_{PS}^{B}[1-R_{SS}^{A}R_{SS}^{B}]^{-1}T_{SS}^{C}\\
&\quad+T_{PS}^{A}R_{SS}^{B}[1-R_{SS}^{A}R_{SS}^{B}]^{-1}T_{SS}^{C}\\
&\quad+T_{PP}^{A}R_{PP}^{B}[1-R_{PP}^{A}R_{PP}^{B}]^{-1}T_{PS}^{C}
\end{aligned} \tag{11}$$

因而，如能略去二次转换，则PP和SS系数呈现出这样的特征，即好象不存在耦合，且转换反馈到SP和PS系数中，而与波场没有进一步作用。

有可能将这种处理办法扩展到包括高至二次转换中，但表达式迅速变得很复杂。且可能最有效的是用完全矩阵形式(2),(3)和(5) 。然而，由于通常感兴趣的是在特定接收点上总的P、S

波场，因而有价值的是能迅速分离出对这些场有贡献的主要传播项，即有一次转换的项。

3. 介质对震源的响应

成层半空间通常由球状模型通过地球展平变换得来（Müller, 1971），令$z=0$为自由表面。方便的是截去水平面z_C以下的结构，且用一均匀半空间来替代它(见图1)。震源在深度z_S($<z_L$)，由于过$z=z_S$平面的位移与垂直应力间断性，在慢度-频率域可计算出其辐射(K83，第四章)。这些间断性可转换成上行和下行辐射[$\Sigma_U^S(p, \omega)$，$\Sigma_D^S(p, \omega)$]辐射到具有震源处特征的均匀半空间介质中。这些辐射波射入震源水平面的上部和下部区域，且这些波被成层部分相继地反射和折射。在前一节所引入的反射矩阵和折射矩阵各项中，表面位移项可表达为(K83，第七章)

$$w_0(p, \omega)=\mathrm{W}_U^{fS}[\mathrm{I}-\mathrm{R}_D^{SL}\mathrm{R}_U^{fS}]^{-1}(\Sigma_U^S+\mathrm{R}_D^{SL}\Sigma_D^S) \qquad (12)$$

这里R_D^{SL}是震源以下区域的反射矩阵，而R_U^{fS}相当于由震源以上到自由表面区域的反射。

用附录中所述的两个单独的循环计算类型，可很快地求出表达式(12)的值。首先，从层状介质的底部开始，组合到震源水平面z_S，这样构成R_D^{SL}。然后从自由表面开始，向下迭代再次至震源水平面，同时计算W_U^{fS}和R_U^{fS}。混响算子必须求逆，各项依次相乘而给出位移的矢量-球谐展开式中的系数。混响算子的奇异项对应于慢度大于β_L^{-1}时震型极点的位置，在衰减介质中它正好位于实慢度轴之上。

如Kennett(1980)所作的那样，若式(12)的每一项都进行完全的计算，则可得到完全的地震图。但这种处理允许应用近似的反射矩阵和折射矩阵给予变通(例如抑制模型中内部多次反射)，这将产生更有限制的位移表达式。假如自由表面由一个透明边界代替，式(12)的形式上结构被保持，但R_U^{DS}和$\tilde{\mathrm{W}}\mathrm{T}_U^{DS}$代替了$\mathrm{R}_U^{fS}$和$\mathrm{W}_U^{fS}$，

这里$\widetilde{W}$既可以是均匀介质中上行波产生位移的矩阵，也可以计入自由表面的放大系数，如前节中所讨论过的。

将式(12)重新写成

$$w_0 = W_U^{fS}\Sigma_U^S + W_U^{fS}[I - R_D^{SL}R_U^{fS}]^{-1}R_D^{SL}(\Sigma_D^S + R_L^{fS}\Sigma_U^S) \quad (13)$$

其中第一项分离出从源向上传播的波，而第二项包括从震源水平面之下反射后回到表面的全部能量。对于P波，在z_S有效地向下辐射为

$$(\Sigma_D^S)_P + (R_U^{fS})_{PP}(\Sigma_U^S)_P + (R_U^{fS})_{PS}(\Sigma_U^S)_S \quad (14)$$

其中，从震源以上的结构中间反射的可能性，使我们可确认直达P波及pP，sP震相，从式(5)可写出

$$R_U^{fS} = R_U^{0S} + T_D^{0S}\tilde{R}[I - R_D^{0S}\tilde{R}]^{-1}T_U^{0S} \quad (15)$$

这里$\tilde{R}$是自由表面本身的反射矩阵，R_U^{0S}与从震源水平面直到表面以下的结构有关。如果反射项和折射项全部计算在内，则式(12)和(13)都包括了全部可能的传播效应。以此为基础来发展适用于近似表达的不同形式，例如采用截取合适的混响算子。

取一个特定且重要的例子，来说明可用不同方法近似地表示地震波场的不同表达结构。考虑成层介质可分为一个上部区域和一个下部区域的情况，但类似的想法也能用于其他情况。

4. 分裂成层构造

在许多情况中，地震波速率分布的特征是这样，它自然地分成一系列有不同性质的深度区域。就整个地球尺度而言，这样一种分法联想到地壳、上地幔、下地幔及地核。就小尺度区域而言，一般地在沉积层形成的表面上有低速区。这种分法很有用处，有可能分离出主要由传到较大深度的一些波在浅区传播时产生的部分波场。

这样一种分裂，可以用引进一个分离面z_J及随后以z_J上、下两个区域特征进行工作来达到(图1)。当源在z_J以上时，即z_S<

z_J，这样的分裂最有用。对于这种情况，表面位移取如下形式（K83，第9.2节）

$$
\begin{aligned}
w_0 = & W_U^{fS}[I - R_D^{SJ} R_U^{fS}]^{-1}(\Sigma_U^S + R_D^{SJ} \Sigma_D^S) \\
& + W_U^{fJ}[I - R_D^{JL} R_U^{fJ}]^{-1} R_D^{JL} C_D^J
\end{aligned}
\tag{16}
$$

这里C_D^J是在z_J处的净向下辐射，

$$
C_D^J = T_D^{SJ}[I - R_U^{fS} R_D^{SJ}]^{-1}(\Sigma_D^S + R_U^{fS} \Sigma_U^S) \tag{17}
$$

式(16)右边的第一项直接相当于在水平面z_J上截取的构造响应（式(12)）。第二项表示从z_J下面反射回来的这些波，通过算子$[I - R_D^{JL} R_U^{fJ}]^{-1}$和在式(17)$C_D^J$中的浅层混响，$R_U^{fJ}$及位移迁移项$W_U^{fJ}$，而有多次深部反射的可能性，从式(5)中得到

$$
\left.
\begin{aligned}
R_U^{fJ} &= R_U^{SJ} + T_D^{SJ} R_U^{fS}[I - R_D^{SJ} R_U^{fS}]^{-1} T_U^{SJ} \\
W_U^{fJ} &= W_U^{fS}[I - R_D^{SJ} R_U^{fS}]^{-1} T_U^{SJ}
\end{aligned}
\right\}
\tag{18}
$$

对于在z_J处向下辐射表达式(17)具有强调表面反射效应的优点。但略作重新安排，就能得到这样一种表达式，即它与上区另外一些项有一个共同的混响算子：

$$
C_D^J = T_D^{SJ}\{\Sigma_D^S + R_U^{fS}[I - R_D^{SJ} R_U^{fS}]^{-1}(\Sigma_U^S + R_D^{SJ} \Sigma_D^S)\} \tag{19}
$$

图1 在水平面J分裂的模型响应的图解表示。波的传播分成完全在上区部分及由下区反射与可能的浅层混响

因而，浅层混响可用如下算子代表。

$$[X^{fSI}]^{-1}=[I-R_D^{SI}R_U^{fS}]^{-1}$$
$$=I+R_D^{SI}R_U^{fS}[I-R_D^{SI}R_U^{fS}]^{-1} \tag{20}$$

在整个半空间中的多次反射给定为

$$[Z^{fIL}]^{-1}=[I-R_D^{IL}R_U^{fI}]^{-1}$$
$$=[I-R_D^{IL}(R_U^{SI}+T_D^{SI}R_U^{fS}T_U^{SI})$$
$$-R_D^{IL}T_D^{SI}R_U^{fS}R_D^{SI}R_U^{fS}[X^{fSI}]^{-1}T_U^{SI}]^{-1} \tag{21}$$

这里，已经从这系列的浅层混响中分离出相当于简单通过上区的这些项。这样一个多次反射算子可用这样的一种形式来代表，即将传播过程分成为主要部分和次要部分，因此有

$$[Z-\Delta Z]^{-1}=[Z]^{-1}+[Z]^{-1}\Delta Z[Z]^{-1}+\cdots \tag{22}$$

在本文中，将用来自深处的主要多次反射来识别 Z 及用包括有地壳混响项来识别ΔZ。

根据这点，原理上从式(16)构成全部响应，为了显式地表示混响算子，将式(16)重写为

$$w_0=W_U^{fS}[X^{fSI}]^{-1}(\Sigma_U^S+R_D^{SI}\Sigma_D^S)$$
$$+W_U^{fS}[X^{fSI}]^{-1}T_U^{SI}[Z^{fIL}]^{-1}R_D^{IL}T_D^{SI}$$
$$\cdot\{\Sigma_D^S+R_U^{fS}[X^{fSI}]^{-1}(\Sigma_U^S+R_D^{SI}\Sigma_D^S)\} \tag{23}$$

回顾一下，出现在Z^{fIL}中的R_U^{fI}能写成为

$$R_U^{fI}=R_U^{SI}+T_D^{SI}R_U^{fS}[X^{fSI}]^{-1}T_U^{SI} \tag{24}$$

由式(23)所述的物理过程用图 1 中的示意图表达。当考虑对式(23)作近似时，所包括的实际物理过程大部分将依赖于对混响算子采用什么样的数值方法。还能控制由震源通过Σ_U^S和Σ_D^S辐射一些什么样的波型，以及它们通过W_U^{fS}计入在表面位移的构成中。

已经用这样一种形式写出式(23)，即只需要一有限数的传播元素来合成响应。震源效应通过Σ_D^S和$\Sigma_U^S+R_D^{SI}\Sigma_D^S$来描述。从震源水平面至地表，要求反射矩阵$R_U^{fS}$和位移迁移项$W_U^{fS}$。也需要从震源水平面至$z_I$的反射和折射矩阵，在$z_I$以下区域只需要反射矩阵$R_D^{IL}$。在成层部分作三次迭代就可得到这些量。与式(12)相

比，虽然反射项和折射项的计算量稍多了些，但能看到在响应的近似构成上会有更大的灵活性。

5. 响应的近似构成

在对式(23)构成一定近似时，我们必须由地震波场的特性及在研究中的特定速度模型做为引导，一旦决定了选择，则有三个方法能作近似。首先，确定包括在响应中的物理过程的类别；第二，选择将要追踪的主要波型；第三，通过对有限制的慢度间隔作数值积分，来产生相应于一有限距离范围的结果，下面将依次考虑这些过程。

5.1 传播过程的选择

用反射和折射矩阵表达的地震波场给出了直接的物理解释，从而，提供了在一个基本的计算方案之内，选择波传播的特定类型的重要范围。这样的选择能避免理论地震图中非常长的时间序列生成，因此降低了计算费用。另一方面，有选择的响应可用于试图了解波传播的什么样特征贡献给地震图的特定部分。应用到式(23)时，给出了依赖于如何处理模型上、下区域的可能近似的层次。

5.1.1 浅层响应的内含

如在上面注意到的$W_U^{fS}[X^{fSJ}]^{-1}(\Sigma_U^S+R_D^{SJ}\Sigma_D^S)$项，相当于完全在$z_J$以上区域内的传播。此区域是典型的相对低速的区域，且相应的波列由多次反射与严重的相互干涉组成。陷入自由表面与速率随深度增加的一般走向之间的导波能构成重要的振幅，且在地震图上起重要的作用。例如，在地震反射波工作中，对于近地表的震源，可观测到大的“地滚”波列。地壳中的导波(Pg,Sg,Lg)在区域性距离(约 400—1200km)的高频地震图上也是十分重要的，假如源和接收点之间的间距与所考虑模型的总深度是同阶的，则

这种浅层传播项在式(23)中应当保留。但当接收点与震源很清楚地分开时，这些震相的相当低的群速度意味着：必须考虑较长的时间间隔，使其包含从深部返回能量和导波。因而最方便的是，单独地计算这种浅层贡献，然后将它加到最终的地震图上。

5.1.2 浅层混响

混响算子$[X^{fSJ}]^{-1}=[I-R_D^{SJ}R_U^{fS}]^{-1}$在式(23)中起重要作用，就象包括多次深部反射中的近接收点和近源两者的贡献一样，调节在$z=0$处影响W_U^{fS}和R_U^{fS}的边界条件，用透明边界代替自由表面。

为了增加复杂性，作上部区域的近似如下。

(a) 透明上部边界，允许无自由表面反射，如果有要求的话，能计入表面放大对W_U^{fS}的影响。

(b) 计入自由表面反射，但浅层混响被压制；用单位矩阵代替$[X^{fSJ}]^{-1}$；这就留下了近源表面反射，其能量传到深部，得到

$$w_0^{de}=W_U^{fS}T_U^{SJ}[Z^{fJL}]^{-1}R_D^{JL}T_D^{SJ}\times\{\Sigma_D^S+R_U^{fS}(\Sigma_U^S+R_D^{SJ}\Sigma_D^S)\} \tag{25}$$

组合震源项包括在z_J以上构造的全部初次反射。

(c) 自由表面多次波的容许量：复原混响算子$[X^{fSJ}]^{-1}$且计入上部区域的多次反射。如果完全数值逆$[X^{fSJ}]^{-1}$被计入，则所有浅部混响都被保留。在完全弹性模型中，这些混响可以衰减慢一点，当计入完全响应时，很难避免时间域上的混淆。在这些情况中，截取混响算子表达式可得到有用的结果，且让

$$[X^{fSJ}]^{-1}\approx I+R_D^{SJ}R_U^{fS} \tag{26}$$

在每次出现$[X^{fSJ}]^{-1}$时只需计入一个额外表面反射，近似式(26)不要求额外的计算，因为矩阵积必需要形成完全逆。

5.1.3 深部的多次反射

由算子$[Z^{fJL}]^{-1}=[I-R_D^{JL}R_U^{fJ}]^{-1}$控制多次反射，其中$R_U^{fJ}$形式已在式(24)中给出，像在浅层混响情况一样，改变表面边界条件和改变算子$[Z^{fJL}]^{-1}$的展开阶次，两者都能控制多次反射的型

式。

当注意力集中在只是P或S震相时，算子$[Z^{fJL}]^{-1}$由单位矩阵替代，最终的近似位移场为

$$w_0^{dc}\approx W_U^{fS}[X^{fSJ}]^{-1}T_U^{SJ}R_D^{JL}T_D^{SJ}\{\Sigma_D^S+R_U^{fS}[X^{fSJ}]^{-1}(\Sigma_U^S+R_D^{SJ}\Sigma_D^S)\} \qquad (27)$$

此表达式对远震记录结果是合适的。Douglas(1973)等对短周期注意力集中在近源和近接收点混响上，而Langston和Helmberger(1975)在长周期合成中已略去这种效应。Fuchs和Müller(1971)原先的反射率法就是基于式(27)，只有通过上部区域的折射。

当要求表面多次反射时，则与z_J以下多次反射有关的长时延迟意味着对大范围的计算很难计入完全算子；对于大多数目的，在一次表面作用之后截取算子就足够了，这样，与深部反射有关的项取：

$$R_D^{JL}+R_D^{JL}(R_U^{SJ}+T_D^{SJ}R_U^{fS}[X^{fSJ}]^{-1}T_U^{SJ})R_D^{JL} \qquad (28)$$

第一项计入P、S震相，第二项则计入PP，PS，SP和SS以及与对$[X^{fSJ}]^{-1}$处理有关的浅层作用的可能性。假如分离面z_J设置较浅，则必需包括更多的多次反射项来给出波场主要部分的表达式。

5.1.4 深部反射的性质

下部区域反射矩阵R_D^{JL}在响应的构成中起很重要的作用。对于均匀层堆成的模型，在附录中所述的迭代法可以应用(任意选择内部多次反射面)。然而，对地幔应用，由按段光滑速度部分给出说明。Kennett和Illingworth(1981)指出，迭代法能适用于这种情况，且这是在下一节中应用于实例的方法。

另外，如果不需要深部反射的详细特征，则稍简单的近似可用来代表反射。Baag和Langston(1985)已对衰减地幔的深部反射应用了WKBJ近似。这要影响他们模型上部中的均匀层计算。Douglas等(1973)在设计产生远震记录的工作中，假定了深部的完全反射及仅仅对深部结构通过时间引入一相位校正。

5.2 波型的选择

已经得到的表面位移表达式，是由一般矩阵形式构成。对于SH波，它们可直接应用于反射和折射系数。对于P-SV系统或更一般的各向异性情况，矩阵表达式包含有2×2或3×3矩阵乘子。从式(9)和(11)可看到，当允许波型的有限转换时，有可能导出适用于某一种波型的特定近似。当保留算法的最大的通用性时，一般更方便的是用完全矩阵扩展来容纳传播项，并在源和接收处放置一个波型选择。

5.2.1 震源辐射

上行和下行辐射项$\Sigma_U^S(p, \omega)$和$\Sigma_D^S(p, \omega)$，都能分裂成对每一波型的一个贡献。假如希望具有最一般的特性，则需保留所有项。通常感兴趣的是主要传播路径，这样就能设法作波型的特定选择。然而，这必需特别小心，对远震P波，明显的贡献是直达波和表面反射波pP。但对地震震源，最主要震相是sP，它来自由震源向上辐射的S波，在自由表面反射而转换成P波。虽然在很少情况下，也有由下行波发生转换成P波。

因而，在分析地震记录中，考虑从震源辐射的特定波型的给定特征和震相的组合时，选择波型的价值最大。

5.2.2 接收器响应

表面位移矩阵W_U^{fS}取上行波场，并产生垂直和水平位移分量。矩阵中每一列元素相当于一特殊波型。因面，依次选择各列，有可能限制注意力在接收器的某一波型上。这便是给出传播路径特定类型的很方便的方法。

5.2.3 深部反射

如果像在式(27)中那样略去自由表面的反射，则下部区域的反射矩阵R_D^{JL}在计算中仅出现一次。因而只要选择矩阵中一个反射系数（如R_{pp}）就可决定模型下部传播的主要震型，它也允许有内部转换（参看Fuchs和Müller，1971）。另一方面，如果兴趣集中

在P波及有关的转换上，则可以排除SS系数，这样避免与纯S波传播有关的更长的时间延迟。

5.3 积分区间选择

一旦得到频率-慢度域的地震波场表示式(如式(12)，(23)和(27)，为了得到理论地震图，必须进行慢度积分。这个积分阶段也可以用来限定在最后的理论地震图中所代表的传播现象的范围。若取慢度窗口从0.06到0.12s·km^{-1}，则这相当在上地幔有转折点的P波，但S波转折点在下地幔。在区间0.2—0.13s·km^{-1}时，P波将限在地壳，而S波从地幔中转回来。当用波场的这种资料并结合刚讨论过的选择近似，则能有效地分离出波传播的特定类型。

这样的一种方法用于Fuchs和Müller(1971)的"反射率"法中来研究绕射P波，而且该方法能应用到更一般的情况。Kennett(1985)用完全响应式(12)在慢度区间0.2—0.4s·km^{-1}进行积分，来处理距离范围100—900km的Sn和Lg震相。对于地盾地壳模型，在这个慢度区间，所有P波消失，这样，仅需要考虑S波附近的有限时间段；这允许计算相当高频(5Hz)而不用过多的花费。

6. 近似计算实例

在前面一节中，已讨论了应用在表达地震波场的广阔范围的近似，且应用分裂的成层形式作为一个特定的说明。用一个例子能最好地理解应用这种近似的方法，下面将考虑在上地幔模型中短周期P波的传播。

对由模型SNA(Grand和Helmberger，1984)导出的上地幔的展平模型图2a进行了计算。震源位于深15km，用分裂-层状方法式(23)构成频率-慢度响应。分离面取在50km深度，这样所有地壳的传播都包括在上部区域的各项中。在介质下部，响应仅限于单一反射，但是在上部区域允许所有可能的反射。从Dziewonski

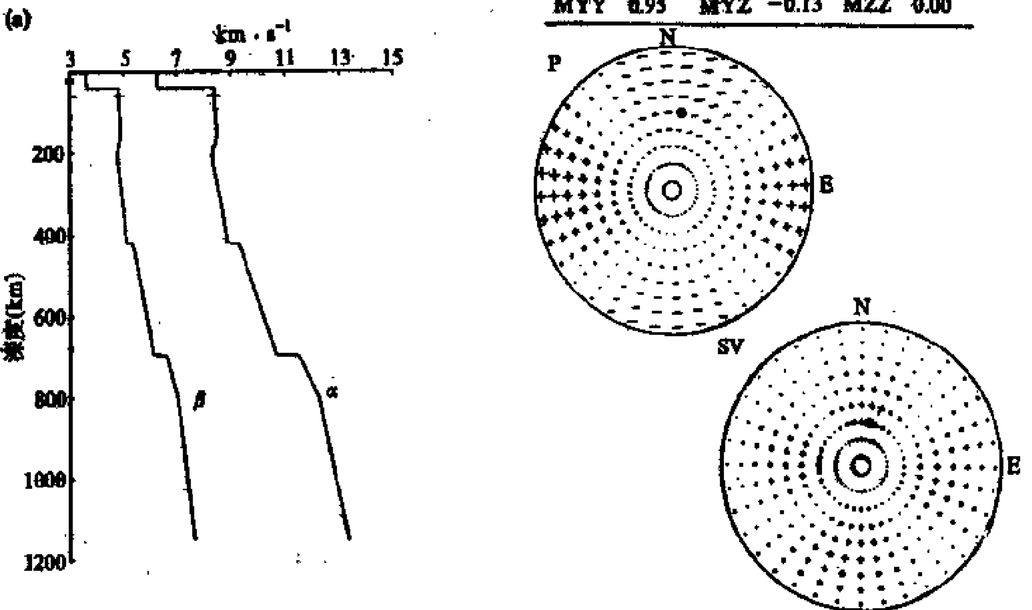


图 2 (a)用于理论地震图计算的展平速度模型。S 波模型由SNA (Grand和Helmberger，1984)推得；P 波速度增加1.74倍，震源深度15km并表示出50km分离面。(b)震源矩张量和等面积投影中 P 波和SV波有关的辐射花样。接收器沿方位角5°安置，离源角用实心圆点表示。符号大小比例于辐射的振幅

等(1986)作的地震35中取矩张量源，用最大主值归一化张量分量(图2b)。选择这个震源是因为它给出从地幔中回转的强辐射P波，而且有明显的SV辐射，这发生转换震相，因而增加了地震图的复杂性。

为将注意力限制在P波场，仅将P波项计入接收响应中，且在积分中取慢度区间为0.078—0.12s·km^{-1}。此慢度范围相当于从M界面下至980km的P波反转点；在模型中无S波转折。由于进入远场甚至考虑最低频率，积分中都应用了矢量球谐渐近式。计算中时间窗用40.96s。记录的开始，由于混淆的多次反射使计算稍有混杂。

图3上部是理论地震图记录。下部是P，pP和sP的走时曲线，以此帮助确认颇复杂地震图上的特征，地震图反映走时曲线特征，包括进入由低速区产生的影区的首次P波分枝的低频连续，以及从上地幔过渡区多次到达有关的复杂效应。在M界面特性上很强烈的对比，意味着与自由表面的反射和折射波同时存在从交接面的转换波与多次反射波。sP震相比pP更主要，这是因为在此慢度范围上，表面的PS反射比PP反射更重要。在最小慢度时，pP更突出，且在2900km左右能清楚地看到。

在长周期段，这些地震图上，可看到所有资料都被仪器响应过程淹没，但应当分解出地震图的特征，而且能像图4对1800—2000km距离范围那样，由选择的近似来实现。我们指明了由图3寻出的完全响应，及用控制震源辐射和自由表面上边界条件得到的响应的各种成分。

除去震源处的SV辐射，有可能揭示由黑方块表记的弱pP震相。若只有震源SV辐射，不仅可看到用黑三角表记的预期的表面转换波sP，也能看到一个较早的转换震相，用白三角表示，当表面反射波被压制时仍持续存在。这个额外震相能解释为M界面上的转换波。它对于这些慢度十分有效，到达时间紧挨pP，这样，可得到干涉效应，这在图3的2100至2300km处十分显著。

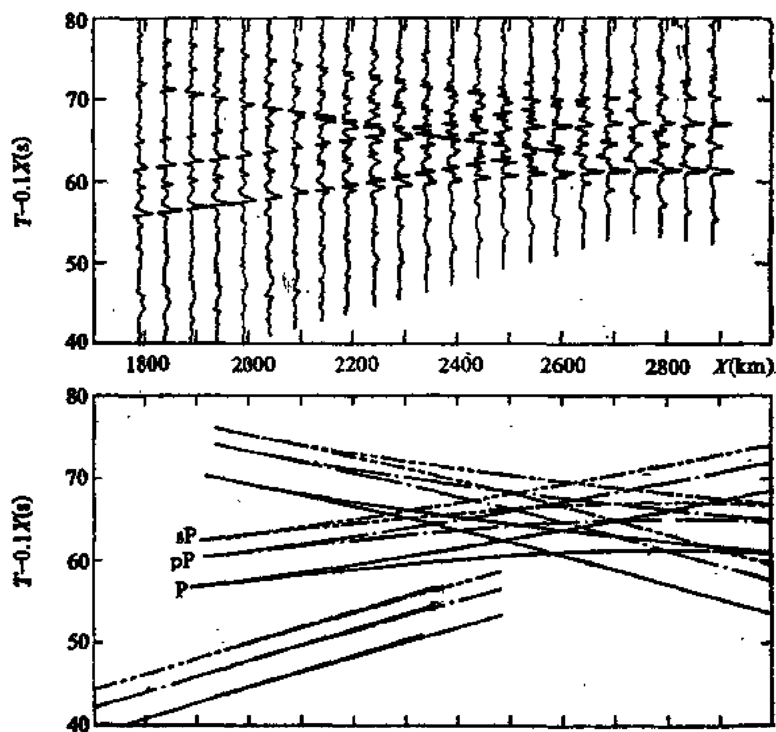


图 3　由图 2 的构造和震源得到的垂直分量的理论地震图，矩速率谱从0.1—2.0Hz范围是平缓的。图下部是 P 波和两个表面反射波pP和sP。对这个上地幔模型的走时曲线，在理论地震图上sP震相特别突出

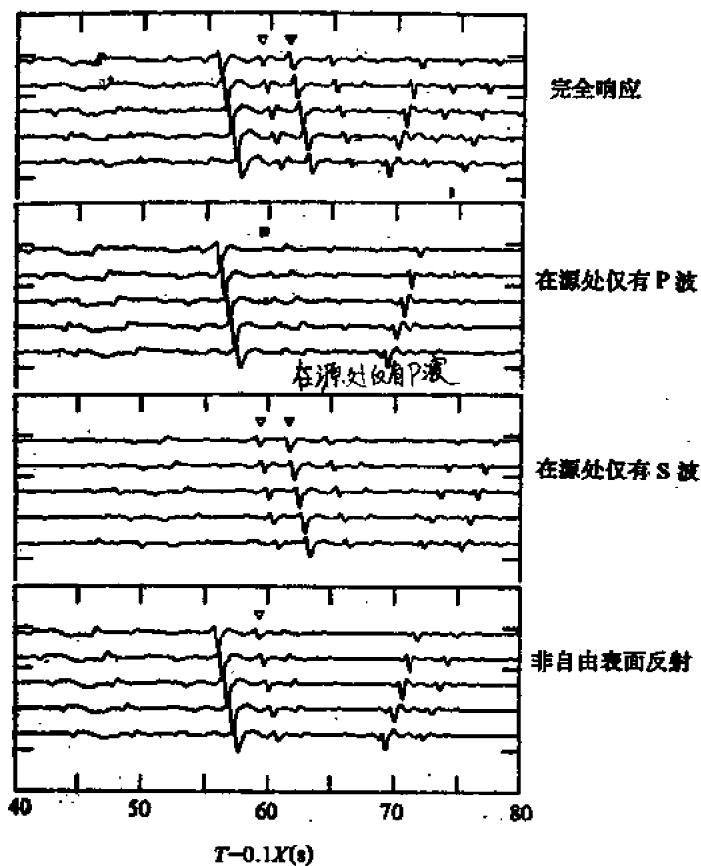


图 4　用图 2 所示的模型，对1800—2000km距离范围地震波作一系列近似的理论地震图。■，pP；▼，sP；▽，在M界面由S波转换为P波

附录：一叠均匀层的递归法

对于联合两个相邻区域反射和折射特征的关系式(2)及(5)，可以构成一个方便的递归法，去计算一叠均匀层构成的介质中的反射和折射矩阵。

均匀区域不存在反射，且折射项简化到适合于传播方向的相位增量，例如，区域$(z_1,\ z_2)$，折射项可写成为

$$T_U(z_1+,\ z_2)=E_U^{12},\quad T_D(z_1+,z_2)=E_D^{12} \tag{A1}$$

速度为α与β的各向同性介质，这些相位项取如下形式

$$E_U^{12}=E_D^{12}=\begin{pmatrix}\exp(i\omega q_\alpha h) & 0\\ 0 & \exp(i\omega q_\beta h)\end{pmatrix} \tag{A2}$$

这里$h=z_2-z_1$及

$$q_\alpha=(\alpha^{-2}-p^2)^{1/2},\quad q_\beta=(\beta^{-2}-p^2)^{1/2},\quad \mathrm{Im}\,\omega q_\alpha\geqslant 0,\quad \mathrm{Im}\,\omega q_\beta\geqslant 0$$

其中p为慢度。

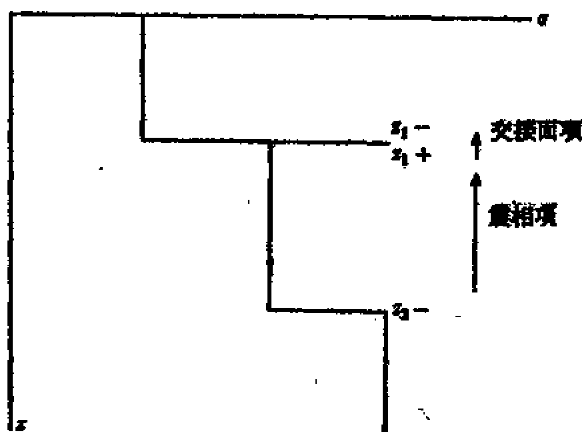


图5　构成反射和折射矩阵的递归法说明

考虑均匀层$z_1<z<z_2$覆盖在非均匀区域$z_2<z<z_3$之上，假设反射和折射矩阵$R_D(z_2-)\equiv R_D(z_2-,z_3+)$等是已知的(看图5)。然后将通过均匀层的传播波加起来，用式(2)和(A1)，有

$$\left.\begin{aligned}R_D(z_1+)&=E_U^{12}R_D(z_2-)E_D^{12}\\T_D(z_1+)&=T_D(z_2-)E_D^{12}\\T_U(z_1+)&=E_U^{12}T_U(z_2-)\end{aligned}\right\}\tag{A3}$$

式(2)的第二个应用，现可计入交接面$z=z_1$的影响，去计算在z_1-处的反射矩阵组。例如，写出交接面矩阵为$r_D(z_1)\equiv R_D\times(z_1-,z_1+)$，因此有

$$\left.\begin{aligned}R_D(z_1-)&=r_D(z_1)+t_U(z_1)R_D(z_1+)[I-r_U(z_1)R_D\\&\quad\times(z_1+)]^{-1}t_D(z_1)\\T_D(z_1-)&=T_D(z_1+)[I-r_U(z_1)R_D(z_1+)]^{-1}t_D(z_1)\\R_U(z_1-)&=R_U(z_2-)+T_D(z_1+)r_U(z_1)[I-R_D\\&\quad\times(z_1+)r_U(z_1)]^{-1}T_U(z_1+)\\T_U(z_1-)&=t_U(z_1)[I-R_D(z_1+)r_U(z_1)]^{-1}T_U(z_1+)\end{aligned}\right\}\tag{A4}$$

(A3)和(A4)两方程组构成递归法。

从层底开始，譬如说z_3，在z_3上交接面矩阵用$r_D(z_3)$等。现在承认这些为$R_D(z_3-)$等；然后用式(A3)去逐步进行层叠反射和折射矩阵至层叠中最底层的顶部，再之，用式(A4)能把层叠矩阵带到交接面的上侧。由(A4)跟着的式(A3)循环，允许着手通过层叠，每次一层，通过任意数目层。

对于向下矩阵R_D和T_D，式(A3)和(A4)仅要求在计算过程中存在向下层叠矩阵。但是对于向上量，从效果上来看，将在波传播系统最复杂的水平面上加上一层，在那里向下和向上矩阵都要求。这种形式的递归法可以容易地推广到自由表面矩阵式(5)，但这里的递归应从表面开始。

递归法有两个重要的计算优点。第一，在固定慢度p上，交接面矩阵与频率无关。因此每一层的步骤中，频率相关仅通过相位项E_U^{12}和E_D^{12}而进入。当交接面项被贮存时，对于一个慢度p，计

算可在许多频率上迅速完成，第二，如果在任何层中有瞬时波，则要得到非指数增长的解；基根的选择要保证指数衰减。

基本递归法可以修改，包括特殊层中对传播特征 的 限 制 近似。因此，例如，若混响算子由单位矩阵替代时，则此层中没有计入内反射。在反射项计入后，将混响算子的展开式截断，也能用来允许对内部多次反射体部分处理。然而当这种近似用于许多层时，困难的是要算出什么样震相被包括在内。

第二章　反射率计算中的混合法

U. Ascher

（不列颠哥伦比亚大学计算机科学系）

1. 引　　言

计算地震学的一个基本问题是：计算由给定矩张量的震源（模拟地震或人工爆破）、在给定的地球模型表面引起的位移。PDE控制系统(时间及三个空间变量)颇为复杂，且常对模型加以某些限制。一个这样的限制已经由许多人考虑过，即允许波速度、密度和衰减系数都只是深度的函数(见，如Aki和 Richards, 1980; Kennett 1983)。然后，如Takeuchi和Saito(1972)所作，位移和经过水平面的应力(即应力张量的 z 分量)能在柱坐标系中展开。由于假设水平向介质是均匀的，这使地震图表示为频率和波数的二重积分（Fourier-Bessel 变换）与方位的关系基本上消失。这重积分的有效计算在本书的另外的部分都有讨论。在频率——波数平面上，每一个被积函数的计算相当于两个耦合边界值常微分方程组(两点问题)，它给出SH和P-SV 波为深度z的函数。

本章重点讨论这些两点问题的数值解。在一个典型计算中，往往可以有 20000 个这样的问题需要求解。因而必须非常小心且很有效地求解它们。本方法的一个优点是它们的解是独立的，且解完全能平行地进行。

在设计这里所讨论的方法和程序时，已经强调了一般性，使得有可能计算强梯度和多个转折点的介质中的完全响应(理论地

震图)。这里提出的内容基本上包含在Spudich 和 Ascher(1983)或Ascher和Spudich(1986)的文章中。

求解这些两点问题的多数传统的工作包含有下述两个方法。在一个方法中，应用初始值数值方法。但这些方法对于高频可变为不稳定。在另一个方法中，应用边值问题的变换。例如，介质特征为小梯度变化区域及在高频段，渐近展开已成功地用来说明P和S波传播(Richards, 1971; Chapman, 1976; Richards 和 Frasier, 1976)。然而，在某些情况下，当介质不充分接近于一叠均匀层时(即有大的速度梯度的区域存在时)，近似的精确度变坏(换种说法，好的近似很难得到)。也就是说，近似的均匀特性很难保持，且定量误差控制已经几乎不能尝试。

这里所述的方法依赖于基本的数值方法，原理上不需要任何特殊的假设(如高频或平缓的梯度)就可工作。可对各种方法列出一个单子，它包括基本方法，也包括一些对某些情况有效的特殊方法。其后构成了混合法，其中在某些区域中应用一些合适的特殊方法，即根据有效性，认为有可能和有价值的方法；而当没有一个特殊方法有价值的情况，常常也有可能回到基本法。

给出讨论情况下的两点问题。考虑一半空间，其中P波速度为α，S波速度为β，密度为ρ。它们都只是深度z的按段连续函数，z指向半空间。对于$0\leqslant z < z_{>}$，α，β和ρ是任意的，但对于$z\geqslant z_>$它们是常量。$\alpha(z)=\alpha_>$，$\beta(z)=\beta_>$，$\rho(z)=\rho_>$，如图1所示。允许α和β是z的复函数，由此模拟滞弹性衰减效应(Schwab和Knopoff, 1972; Kennett, 1983)。也采用Phinney(1965)的作法，允许ω为复数。

应用Fourier-Bessel变换，令ω是给定的频率和k是水平波数，并定义慢度为

$$p=k/\omega \qquad (1.1)$$

然后得到如下形式的微分方程组

$$\partial_z b=\omega A(z)b \quad (0 < z < z_{>}) \qquad (1.2)$$

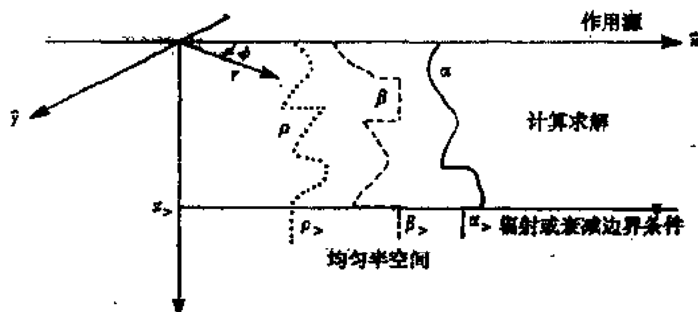


图1　一般问题的几何图形

这里A与p有关而与ω无关。对于SH波，有一个$n=2$阶的问题

$$b\equiv b_H,\quad \mathrm{A}\equiv\mathrm{A}_H=\begin{bmatrix}0 & \mu^{-1}\\ \mu p^2-\rho & 0\end{bmatrix},\qquad \mu=\rho\beta^2 \quad (1.3)$$

而对于P-SV波，得$n=4$，有

$$\left.\begin{aligned} & b\equiv b_P,\quad \mathrm{A}\equiv\mathrm{A}_P=\begin{bmatrix}0 & (\rho\alpha^2)^{-1} & q_1 & 0\\ -\rho & 0 & 0 & p\\ -p & 0 & 0 & \mu^{-1}\\ 0 & -q_1 & q_2 & 0\end{bmatrix}\\ & q_1=p\left(\frac{1-2\beta^2}{\alpha^2}\right),\quad q_2=4\mu p^2\left(\frac{1-\beta^2}{\alpha^2}\right)-\rho\end{aligned}\right\} \quad (1.4)$$

未知函数是$b_H=[a_5\ \ \omega^{-1}a_6]^T$和$b_P=[a_1\ \ \omega^{-1}a_2\ \ a_3\ \ \omega^{-1}a_4]^T$，其中$a_1$，…，$a_6$是在第一章中提到过的位移和应力的展开系数。

系统(1.2)式在$z=0$和$z=z_>$两端的每一处都要补充$\frac{1}{2}n$个边界条件，就如Spudich和Ascher(1983)所叙述的那样。基本上，在$z_>$处，应用对于$z\geqslant z_>$仅要求下行波的辐射条件。在$z=0$处，应用由Olson等(1984)得到的三个正交强制项条件，这些条件允许对于介质构成必要的Green函数，用其对称性交换源和观测点的位置。这样就把在区域中央的可厌的(爆炸)震源项换成了边界值中的无损害的不均匀性。从这些Green函数，能得到介质中的应

变张量，然后与地震矩张量一起，得到由点矩震源产生的地面位移(详细叙述见 Spudich 和 Ascher(1983)的文章中的第 2.5 和 2.6 节)。

注意式(1.3)和(1.4)中的矩阵A，存在着一个按段光滑的变换矩阵E(z)，即

$$E^{-1}AE=\Lambda(0<z<z_>) \tag{1.5}$$

这里$\Lambda(z)$是对角本征值矩阵，$\Lambda(z)=\mathrm{diag}\{\lambda_1(z),\cdots,\ \lambda_n(z)\}$. 对于SH,

$$\Lambda=\mathrm{diag}\{\nu_\beta,-\nu_\beta\} \tag{1.6}$$

而对于P-SV

$$\Lambda=\mathrm{diag}\{\nu_\alpha,\nu_\beta,-\nu_\alpha,-\nu_\beta\} \tag{1.7}$$

其中

$$\nu_\alpha=(p^2-\alpha^{-2})^{1/2},\nu_\beta=(p^2-\beta^{-2})^{1/2} \tag{1.8}$$

选择

$$\mathrm{Re}(\omega\nu)\geqslant0;\ \mathrm{Im}(\omega\nu)\leqslant0\quad 当\mathrm{Re}(\omega\nu)=0时 \tag{1.9}$$

注意，对于所有的z，有$\nu_\alpha(z)\neq\nu_\beta(z)$，这是因为由物理考虑，有$\mathrm{Re}(\alpha(z))>\mathrm{Re}(\beta(z))$。

2. 解两点问题的方法

本节简略叙述求解两点问题式(1.2)—(1.4)的方法，首先对所用的数值方法给出一个一般的框架。

2.1 数值方法的一般框架

对于给定的ω和p，z区间再被分为小段：

$$0=z_1<z_2<\cdots<z_N<z_{N+1}=z_> \tag{2.1}$$

以这样的构成来满足下述特征。

(a) 材料间断的所有点(即层之间的交接面，其中$\alpha(z)$，$\beta(z)$，$\rho(z)$或它们的导数都可能是不连续地变化的)都包括在小段中。因而，假设，例如，A(z)在每一子区间上二次连续可微，即

$$A(z) \in C^2[z_i, z_{i+1}] \quad (1 \leqslant i \leqslant N) \tag{2.2}$$

(b) 每一个子空间(或单元)(z_i, z_{i+1})上，将确切地保持着，下面将要讨论的解特征的情况之一。

(c) 每一单元

$$h_i := z_{i+1} - z_i \quad (1 \leqslant i \leqslant N) \tag{2.3}$$

的大小是足够小，使得用数值方法得到所要求精度的解。

构成这样一小段的算法在第 3 节中叙述。这里，假设有了一个解，然后寻求一个数值解$\{b_j\}_{j=1}^{N+1}$，使其对给定的允许偏差δ，有

$$|b_j - b(z_j)| \leqslant \delta \quad (1 \leqslant j \leqslant N+1) \tag{2.4}$$

分别使 b_1 和 b_{N+1} 满足边界条件 $b(0)$和 $b(z_>)$及在每一小段元素中，维持着下式的关系

$$R_j b_{j+1} = S_j b_j \quad (1 \leqslant j \leqslant N) \tag{2.5}$$

就得到这个数值解。这里R_j和S_j是$n \times n$矩阵和 R_j 是非奇异的。令

$$\Gamma_j = R_j^{-1} S_j \tag{2.6}$$

有

$$b_{j+1} = \Gamma_j b_j \tag{2.7}$$

因而，期待Γ_j近似等于传播矩阵$B(z_{j+1}, z_j)$，这里

$$b(z) = B(z, \zeta) b(\zeta) \tag{2.8}$$

除非单元(z_j, z_{j+1})中的解包含有高损耗波。相反，任何对式(2.1)某一形式子区间产生$B(z_{j+1}, z_j)$的近似方法，都可明显地写成式(2.5)形式。

$n(N+1)$个线性方程式(2.5)和边界方程都有一种熟知的形式，且可求解。如Spudich和Asecher(1983,2.4节)所述的那样求解。

2.2 配　置

基本方法是在Gauss点上配置，这种方法详细叙述在 Spudich和Ascher(1983)与Ascher和Weiss(1984)的文章及其参考文献中。

给定如式(2.1)的小段及 l 个点$0\leqslant\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_l\leqslant1$(即$l=3$)，基本思想是要构成近似解$\mathrm{b}^h(z)$，它在整个区间$[0, z_>]$上连续，在每一单元$[z_j, z_{j+1}]$中，简化到最高次为$l$的多项式，满足边界条件，及在$lN$个配置点$z_{j,r}=z_j+h_j\xi_r$上满足微分方程式(1.2)，即

$$\partial_z\mathrm{b}(z_{j,r})=\omega\mathrm{A}(z_{j,r})\mathrm{b}^h(z_{j,r})\quad(1\leqslant j\leqslant N, 1\leqslant r\leqslant k)\qquad(2.9)$$

选择点ξ_r是Gauss 点(Legendre 多项式的零点)，这样，这种配置法相当于一个复合的Gauss求积公式。

能够证明，这个方法能简化为一个式(2.5)形式的对称高阶有限差分方法(Spudich和Ascher 1983，第2.4节)它有下列性质。

(i)对于中、低频率，它是精确的，因为

$$\max_{1\leqslant j\leqslant N}|\mathrm{b}(z_j)-\mathrm{b}^h(z_j)|=O(h^{2l})\qquad(2.10)$$

(对于高频体波，式(2.10)仍成立，但方法中的比例系数为 ω^{2l}，且变成大值)。

(ii)若专门应用于高损耗波，则它会很好地执行。即使没有明显分离的上行和下行波，这种方法还是有效(这种分离是不明显和微弱的，但足以有一个稳定的方法)。

像这种方法证明的那样，配置法工作得很好的情况，恰恰是早期(及在下面的2.3和2.4节)提到的一些特殊方法不能应用或无救的情况。另一方面，当解是高度振型时，即当$\mathrm{A}(z)$的本征值($\nu_\alpha(z)$或$\nu_\beta(z)$)是(或几乎是)纯虚数和ω很大时，配置方法不能有效地进行(这正象对高振型积分Gauss求积一样)。

进行这样一种配置法的最简单的情况是将配置点取在每一单元的中点。这象已知的中点法(或称箱围框法)一样，且对于式(1.2)，有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{R}_j&=\mathrm{I}-\frac{1}{2}\omega h_j\mathrm{A}(z_{j+1/2})\\ \mathrm{S}_j&=\mathrm{I}+\frac{1}{2}\omega h_j\mathrm{A}(z_{j+1/2})\end{aligned}\right\}\quad z_{j+1/2}=\frac{1}{2}(z_j+z_{j+1})$$

$$(1\leqslant j\leqslant N) \qquad \begin{matrix}(2.11a)\\(2.11b)\end{matrix}$$

与高阶配置法比较，((2.6)式的)Γ_j的结构，在这里更为简单(且便宜)，但精度较低，因而必需有较小的步长尺寸h_j来达到一个给定的精度。

为了应用配置法近似满足一致精度要求式(2.4)，下面考虑小段式(2.1)的选择。成功的小段选择的原则(使小段单元数目N尽可能的小)是误差均等分布的原则，即选择h_j使第j单元$1\leqslant j\leqslant N$的误差贡献近似为一常量。这样的选择过程要求对解的梗概有些了解，因而，一般仅能用自适应方法未完成(见Ascher等(1979)的这种自适应算法的例子)。但是，对于P-SV和SH问题，可得到解的某一先验知识，从而允许预先选择一个合适的小段，以一种便宜的方法计算解，如下面所述。

式(1.2)的矩阵A(z)的性质加上$z_>$上的边界条件，允许只考虑下行波，因此，考虑一个这样形式的微分方程

$$\partial_z y=-\omega\nu_\beta(z)y,\ y(0)=1;\ \ \mathrm{Re}(\omega\nu_\beta)\geqslant 0 \qquad (2.12)$$

进一步假设，构成小段的每一单元$[z_j,z_{j+1})$上$\nu_\beta(z)$是常量。当$\mathrm{Re}(\omega\nu_\beta)$值很大时，这也就是应当用配置法，而且好的小段选择是很重要的情况时，这些简化假设特别合适。

式(2.12)的解是

$$y(z)=\exp\left\{-\sum_{i=2}^{j}\omega[\nu_\beta(z_{i-1})-\nu_\beta(z_i)]z_i-\omega\nu_\beta(z_j)z\right\}$$

$$(z_j\leqslant z\leqslant z_{j+1}) \qquad (2.13)$$

这样，能估算

$$\left.\begin{aligned}|y(z_j)|&\approx\exp\left\{-\sum_{i=1}^{j-1}h_i\mathrm{Re}[\omega\nu_\beta(z_i)]\right\}\\ |y^{(2l)}(z_j)|&\equiv|\partial_z^{2l}y(z_j)|=|\omega\nu_\beta(z_j)|^{2l}|y(z_j)|\end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

现在，来自第j个单元的误差贡献(如Gauss求积一样)比例于

$$h_j^{2l+1}|y^{(2l)}(z_j)|$$

这样，每单位步长的误差分布原则要求选择h_j使得

$$h_j^{2l}|\nu_\beta(z_j)|^{2l}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{j-1}h_i\text{Re}[\omega\nu_\beta(z_i)]\right\}=h_1^{2l}|\nu_\beta(0)|^{2l} \tag{2.15}$$

实际上，对于SH方程，选择

$$h_j:=h_1\min\left\{1,\left|\frac{\nu_\beta(0)}{\nu_\beta(z_j)}\right|\right\}\exp\left\{\frac{1}{2l}\sum_{i=1}^{j-1}h_i\text{Re}[\omega\nu_\beta(z_i)]\right\} \tag{2.16}$$

由所要求的允许偏差δ，设定h_1的值为

$$h_1:=\text{cons}_l|\omega\nu_\beta(0)|^{-1}\delta^{1/2l} \tag{2.17}$$

这里cons_l是一已知常量，它代表有l个点的Gauss求积误差常量。对于P-SV方程，计算像在式(2.16)和(2.17)中的量，则也用ν_α代替ν_β，并在两个得到的h_j值中，选择最小值。另外，若

$$\min[\text{Re}\nu_\alpha(z_j),\ \text{Re}\nu_\beta(z_j)]<0.1,$$

则在小段选择过程可信度较小，取$h_j:=\frac{1}{2}h_j$。

从式(2.17)可看出，对于较大的l，可取较大的h_1，当δ非常小时，这个高阶配置法的优点就特别重要。另一方面，低阶(较小的l)方法构成每个单元是比较便宜。当给定δ，ω和p，选择小段时，在点z_j最合适的配置法是以最小的花费，能在一个固定大小的区间(z_j,z)上进行配置，实际上只考虑两个不同的方法：有l个配置点的高阶法(通常$l=3$或4)或中点法($l=1$)。既对l个配置点，也对中点法，用式(2.16)和(2.17)计算h_j，如果

$$h_j(\text{配置})<h_j(\text{中点})e_M$$

则喜欢用后者。这里e_M是中点法中的相对有效因子。它由Ascher和Spudich(1986)所给定。

2.3 高速振型解(体波)的数值方法

在$z_j\leqslant z\leqslant z_{j+1}$($j$为固定数，在$1\leqslant j\leqslant N$)考虑问题式(1.2)，假设$\omega$(正的)很大，$\nu_\alpha(z)$和$\nu_\beta(z)$几乎为纯虚数。因而在$z_j$和

z_{j+1}之间有许多波长，而且要求一个方法，它将z_j处的信息与z_{j+1}处的信息联系起来，而不管中间紧接着的所有振型。一般有限差分或配置法是不适合于这种直接应用式(1.2)的情况的。

另一方面，这里的情况比高损耗的情况容易。在高损耗情况中，近似传播矩阵$\mathsf{B}(z_{j+1}, z_j)$数值上的意义：基本解分量的生长因子至多是

$$\exp\{h_j \max_{z_j \leqslant z \leqslant z_{j+1}} [\mathrm{Re}(\omega\nu_\beta)]\}$$

在这种情况下，这个值限于一个中等大小的常量。换一句话说，传播矩阵求解的初值问题的调节，实际上不会比给定的边值问题的调节差。

用Richards(1971)和Chapman(1974)的方法，试图构成一个矩阵Γ_j去近似$\mathsf{B}(z_{j+1}, z_j)$。可得到一个$O(\omega^{-2})$级近似式，有

$$\mathsf{R}_j = [\mathsf{I} - \omega^{-1}\mathsf{P}_1(z_{j+1}^-)]\mathsf{E}^{-1}(z_{j+1}^-) \qquad (2.18a)$$

$$\mathsf{S}_j = \exp[\omega \mathsf{Q}_0(z_{j+1}^-) + \mathsf{Q}_1(z_{j+1}^-)][\mathsf{I} - \omega^{-1}\mathsf{P}_1(z_j^+)]\mathsf{E}^{-1}(z_j^+) \qquad (2.18b)$$

这里

$$\mathsf{Q}_0(z) = \int_{z_j}^{z} \Lambda(\zeta)\,d\zeta \qquad (2.19)$$

$$\tilde{\mathsf{E}}(z) = -\mathsf{E}^{-1}(z)\partial_z \mathsf{E}(z) \qquad (2.20)$$

$$\partial_z \mathsf{Q}_1 = \mathrm{diag}\{\tilde{E}_{11}, \cdots, \tilde{E}_{nn}\}, Q_1(z_j) = 0 \qquad (2.21)$$

$$(\mathsf{P}_1)_{ik} = (\lambda_k - \lambda_i)^{-1}\tilde{E}_{ik} \quad (i \neq k) \qquad (2.22)$$

$$(\mathsf{P}_1)_{ii} = \int_{z_j}^{z} \sum_{k \neq i} \tilde{E}_{ik}(\mathsf{P}_1)_{ki} = \int_{z_j}^{z} \sum_{k \neq i} (\lambda_k - \lambda_i)(\mathsf{P}_1)_{ik}(\mathsf{P}_1)_{ki} \qquad (2.23)$$

应用近似(2.18)的可行性是如下确定的。给定一个精度的容许偏差δ，要求

$$\mathrm{Re}(\omega\nu_\beta)h_j \leqslant 4, |\omega\nu_\beta| \geqslant |\partial_z \beta|\delta^{-1/2}, |\omega\rho^{-1}| \geqslant |\partial_z \rho|\delta^{-1/2} \qquad (2.24a)$$

$$|\omega\nu_\alpha| \geqslant |\partial_z \alpha|\delta^{-1/2} \qquad (2.24b)$$

$$\mathrm{Re}(\omega\nu_\alpha)h_j\leqslant 6,\mathrm{Re}(\nu_\alpha)\leqslant\mathrm{Im}(\nu_\alpha) \qquad (2.24c)$$

在z_j和z_{j+1}两处都满足。如果满足上述条件，且在z_j和z_{j+1}之间无转折点（证明$\mathrm{Re}(\beta-p^{-1})$和$\mathrm{Re}(\alpha-p^{-1})$不变号即可），则可用式(2.18)。不论我们实际上用或不用，它总依赖于单元的大小h_j，这个单元大小应与同样深度z_j上用配置法所需要的单元大小相比较（看第3节）。这些条件有效地防止了一个不可接受的舍入误差的积累。

2.4 转折点和漏能振型

考虑$\nu_\alpha(z)\approx0$或$\nu_\beta(z)\approx0$在$z_j\leqslant z<z_{j+1}$上的可能性。为了简单表达起见，假设速度α和β是实的。因而，当用相速度p^{-1}比较它们时（回顾式(1.8)），应区别三种情况。

(i) $p^{-1}\approx\beta(z)$（S波转折点）

这样有$\nu_\beta(z)\approx0$和$\nu_\alpha^2(z)>0$。这种情况，仅在SH问题中唯一出现，因$|\omega\nu_\beta|$值不大，ν_α是实数，所以，用配置法处理得十分好。

(ii) $\beta(z)<p^{-1}<\alpha(z)$（“漏能振型”）

这种情况发生在P和S波转折点之间。这样有$\nu_\alpha^2(z)>0$和$\nu_\beta^2(z)<0$。由于第2.3节中的基本矩阵方法仅适合于振型S波，而配置法仅适合于损耗P波，因而当大值ω时，必须解耦S和P波分量。若没有分离这些震型，则什么方法都能不有效地应用。因而可考虑变换过的常微分方程式(1.2)，这里$A(z)$由一个类似的变换使成对角形式，这近似地给出对角微分系统，为

$$\partial_z\hat{U}=[\omega\Lambda(z)+\partial_z Q_1(z)]\hat{U} \qquad (2.25)$$

(Ascher和Spudich(1986))，这样，$\hat{U}$的每一行都能单独处理。

对于P-SV问题，从式(1.7)看到，$\hat{U}$的第二和第四行能像在第2.3节那样处理，而$\hat{U}$的第一、三行能用配置法很好地近似，对式(2.25)的每一行采用合适的离散化，然后变回到原来的变量得到式(2.5)，应用这种近似的可行性由如下要求确定，即要

求式(2.24a,b)(不是式(2.24c))在z_j和z_{j+1}两处都存在，且那里没有转折点。单元大小h_j是在给定精度容许偏差δ下，对P波采用配置法所允许的步长和对S波采用体波近似所允许的步长中取一最小值。

(iii)$p^{-1}\simeq\alpha(z)$(P波转折点)

这样有$\nu_\beta^2(z)<0$和$\nu_\alpha(z)\approx0$。在高频时解耦P和S波，且对P波采用配置法，而对S波应用近似基本矩阵。然而，不象上面的情况(ii)，不能应用$A(z)$的本征矢量矩阵$E(z)$将式(1.2)变换成象式(2.25)那样的对角形式，这因为$\|E(z)\|\ \|E^{-1}(z)\|$不是有界的。代以之，用如下形式进行解耦

$$D^{-1}AD=\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ \nu_\alpha^2/p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_\beta \end{pmatrix}\equiv\hat{A}\equiv\begin{bmatrix} H_\alpha & 0 \\ 0 & \Lambda_s \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

这里D^{-1}有类似于ν_β^{-1}的项，而没有ν_α^{-1}的项，这样它在通过α转折点时，保持着恰定的与光滑的。

这样得到变换过的近似系统

$$\partial_z U\doteq[\omega\hat{A}+\tilde{A}+O(\omega^{-1})]U \quad (2.27)$$

这里$\tilde{A}$是在2×2的非对角块上以及右下对角块上都为零的矩阵。然后略去$O(\omega^{-1})$项，并对式(2.27)解耦。这允许对解耦系统每一行重新应用合适的方法。留下的结构类似于早期讨论过的漏能振型情况(ii)，详细的可参见Ascher和Spudich(1986)的文章。应用这些近似的可行性由存在于z_j和z_{j+1}两处的条件式(2.24a)(而非式(2.24b))确定。

注意，在式(2.26)中应用了一个非通常的变换。因而它不增强和衰减这里解耦的解分量：P波分量由配置法一起隐含地处理，即宁可让P波从高振型的S波中解耦。

3. 混 合 法

已知频率 ω、慢度p和误差偏差δ的情况下，混合法包括一个构成的小段式(2.1)和在小段每一单元上，采用的特定数值法。这种混合法将用来得到给定精度的解$\{b_j\}_{j=1}^{N+1}$，前节中已经提出，对于每一个小段单元有5个可能的方法：

(1) 有l个点的配置法($l>1$,输入参数；补缺值$l=3$)；

(2) 中点法($l=1$的配置法)；

(3) 第2.3节的体波方法；

(4) 漏能振型法(第2.4节的情况(ii))；

(5) P波转折点法(第2.4节的情况(iii))。

令

$$0=d_1<d_2<\cdots<d_M=z_> \tag{3.1}$$

是一系列深度，这些深度必须包括在小段中(回顾第2.1节中关于式(2.1)的要求(a)。d_i也可以是一点，在这点上要求$b(d_i)$值)。对小段的算法及方法选择产生小段的尺寸N、各小段点式(2.1)的数组$\{z_1, z_2, \cdots, z_{N+1}\}$和数组$\{\text{method}_1, \text{method}_2, \cdots, \text{method}_N\}$，其中$\text{method}_j$表示应用在$(z_j, z_{j+1})$上的方法，$1\leqslant \text{method}_j\leqslant 5$，$1\leqslant j\leqslant N$。

算法中所包含的原理十分简单，在每一步中，一般利用方法(1)和(2)较有效，除非(3)—(5)方法中的一个是既可用又更有效。注意，方法(3)，(4)和(5)按这顺序来校核可行性，且至多它们当中的一个可能被发现在任何步中是可行的。

算法：小段和方法的选择

$N:=1$； $z_1:=0$

FOR $i:=1$ to $M-1$ DO {在每两个给定深度之间构成小段}

$hh:=d_{i+1}-d_i$

WHILE $hh>0$ DO

确定$h_c = h_j$，根据第 2.2 节所述的式(2.16)确定h_M，类似于中点法

IF $h_M \geqslant hh$ THEN {应用中点法}

  $\text{method}_N := 2$; $h := hh$

ELSE

  $h := \max\{h_c, e_M h_M\}$

  {校核应用方法(3)，(4)，(5)的可行性}

  IF $h < hh$ AND 对于某些j，$3 \leqslant j \leqslant 5$，方法($j$)当步长大小$h^* > h$时是可行的{象在第2.3节，第2.4节所述；大多数情况有一个j能合格}

    THEN

      $\text{method}_N := j$; $h := h^*$ {应用方法(j)}

ELSE {应用配置法}

  IF $h = h_c$ THEN

    $\text{method}_N := 1$; $h := \min\{h, hh\}$

  ELSE

    $\text{method}_N := 2$; $h := h_M$

  END IF

  END IF

  END IF

  $z_{N+1} := z_N + h$; $hh := hh - h$; $N := N + 1$

END WHILE

END FOR

4. 实　　例

为说明混合方法如何工作，在 Ascher 和 Spudich(1986)文章中，曾计算过一个试验速度结构的合成地震图，它的参数由表 1

给出。结构是完全弹性的(α和β为纯实数)，且β按Poisson介质从α导出。除表1给出的点外，所有的材料性质都随深度线性变化。

上述混合方法的执行，已被写成一系列Fortran程序。这是一个单立的程序包，它需要一个驱动程序和子程序，驱动程序给定软件包的输入参数及根据返回来控制软件包的输出，子程序则是说明所应用的速度结构的。表1所列出的资料在后一个程序中给定，每给定一个z值，应得到$\rho(z)$，$\beta(z)$和$\alpha(z)$的值。

试验模型被选择具有颇为不同的速度梯度($\partial_z\alpha=2s^{-1}$与$\partial_z\alpha=0.33s^{-1}$)的两个区域，这是为了说明第3节中的计算法，怎样选择网格点以及与ω，k和速度梯度有关的每一网格子区间上的解法有关。图2表明在各种波数值k，而频率固定在9.0Hz时所选择的网格点及求解方法。图中所示的情况从顶至底分别相当于损耗波，S波转折点(第2.4节的情况(i))，漏能振型(第2.4节的情况(ii))，P波转折点(第2.4节的情况(iii))和两个转折点以上的情况(第2.3节)。当每一种情况都要引起修正混合方法时，则要注意对每一个网格子区间的方法的自动选择。以一个合理的稀疏网格，成功地解决S波转折点问题。在高损耗情况，配置点在接近表面要密密地安排，因那里解变化很快。而对于较大的深度，按式(2.16)网格变得稀疏，事实上，步长大小的极限由介质间断的邻点最终被定出，这要求选择较便宜的中点法。

在这个模型中，由于$0<z<0.5$的速度梯度很大，以致配置法不得不用在图2那部分区域中的所有情况。当$\nu_\beta^2<\nu_\alpha^2<0$时，可能遇到式(2.24a)存在，而式(2.24b)不存在；因而较早对SH问题应用体波近似比对P-SV问题更行得通。对于在$0<z<0.5$上的P-SV问题，仅在高频时才有可能应用(3)—(5)方法。

为证明用5种方法构成混合方法的努力是值得的，图3表示出图2中的相应结果，而图2的结果是仅仅用配置法及由式(2.16)选择网格而得到的。很清楚，在高频时必需有更多的网格

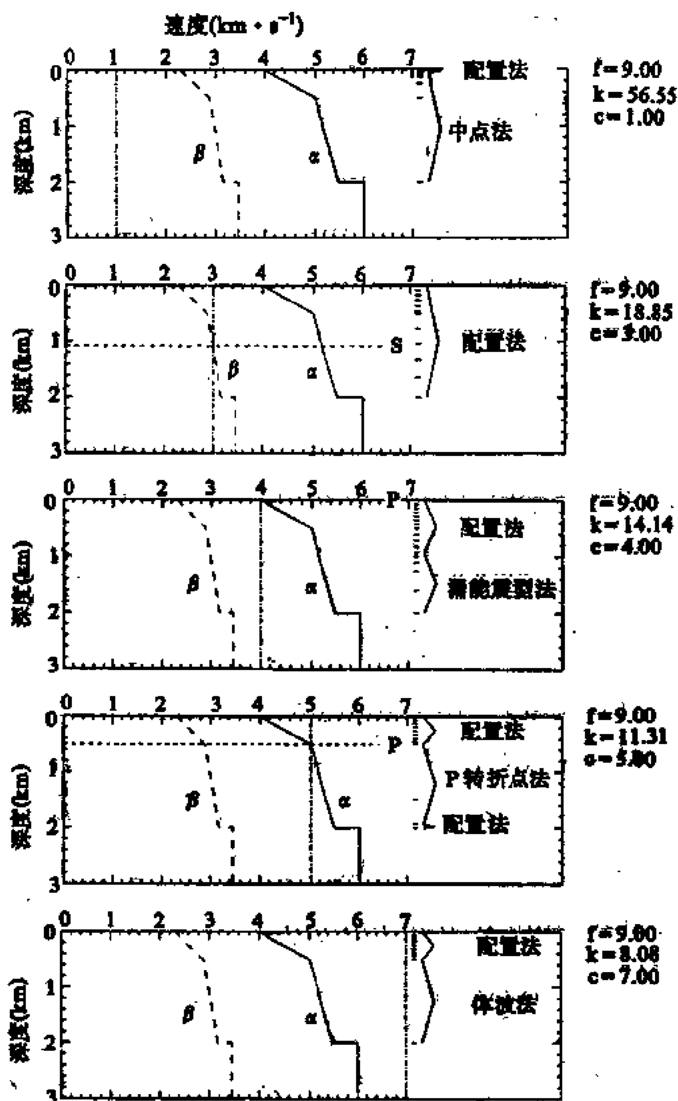


图2　由混合方法选择的网格点及解法

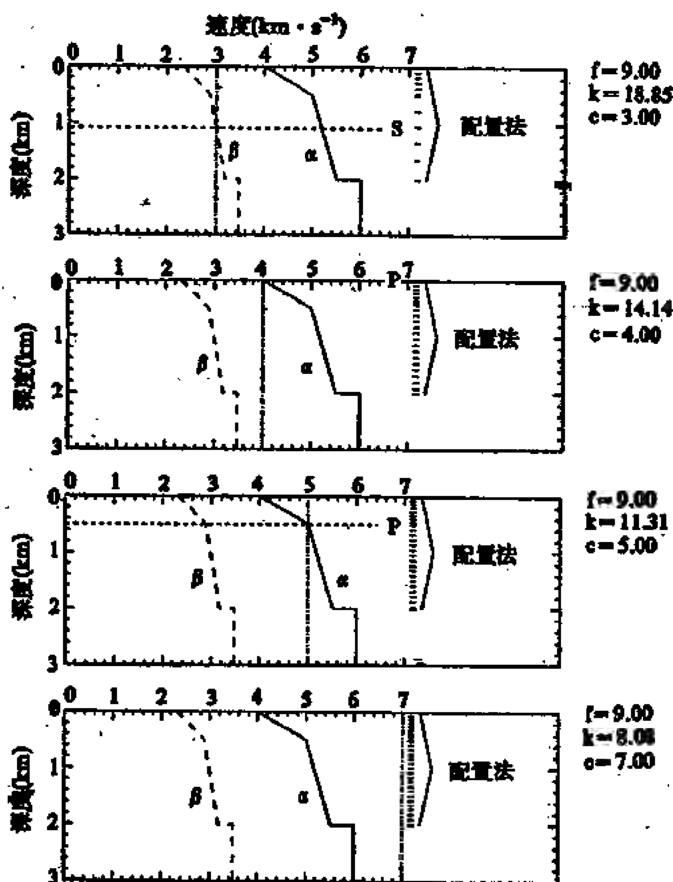


图3 仅用配置法时P-SV问题的网格点

点来得到，而不用(3)—(5)的类似质量的解。

已经说明了如何求解单独边值问题之后，下一步是在(ω, k)域上积分和构成最终的合成地震图。但是这种计算的整个内容超出本章范围，因为提供的软件只处理深度上的两点问题。感兴

趣的读者可参考Ascher和Spudich(1986，第4节)的文章。

表1　试验速度模型

深　度　(km)	α (km · s^{-1})	β (km · s^{-1})	ρ (g · cm^{-3})
0	4.00	2.31	2.37
0.50	5.00	2.89	2.54
2.00	5.50	3.18	2.63
>2.00	6.00	3.46	2.71

第三章　波数积分求积

L. N. Frazer

（夏威夷大学　夏威夷地球物理研究所）

1. 引　　言

Filon 型梯形规则可用来加速多数振荡积分的计算，这些振荡积分在计算地震学中出现。这里要说明如何推导这个规则，并应用到反射率法、相积分法和Kirchhoff-Helmholtz 法中出现的积分。近来已发展的求积法比已有的梯形Filon规则更为有效，这里也给予评述。

在合成地震图计算中，运动u常以下述积分形式得到

$$u(x,t)=\int d\omega\int dk \quad e^{i(kx-\omega t)}\tilde{u}(k,\omega) \qquad (1)$$

这里x是空间坐标，t是时间，ω是瞬时频率和k是波数。在这些方法中，首先计算k积分，而后求 ω 积分，这些方法往往称作频谱法，而另一种情况，首先计算ω积分，其后计算k积分，则往往称为慢度法 (Chapman，1978)。在 Cagniard-de Hoop 方法中 (de Hoop，1960)利用映射$k=k(t)$来抵消ω积分和k积分。频谱广义射线法在计算上比慢度广义射线法和Cagniard-de Hoop 方法慢，但所有频谱法都具有很大的优点，就是允许与频率有关的地震波速度(Frazer，1983)。已多次说明，地震波速度的频率依赖性是因果律的结果。它能深深地影响体波波形和到时(Jeffreys，1965，1967；Sfrick，1970)，当比较由不同频带地震资料得到的速度模

型时，考虑频率依赖性特别重要（Lia等，1976）。这里仅处理在频谱法中出现的波数积分。在慢度法中，出现的积分求积在下面文章中得到过处理，即 Wiggins（1974），Chapman(1978)，Dey-Siarkar和Chapman(1978)，Frazer和Phinney(1980)，Fryer(1981)，Snton和Frazer(1982)，Chapman和Drummond(1982)，Burdick和Salvado(1986)。适合于慢度积分的求积方法也在Kirchhoff-Hemholtz方法的时间域形式中(Hilterman，1970，1976；Berryhill，1979；Kinney等；1983；Spudich和Frazer，1984）和时间域的多重路径积分方法中应用（Frazer，1986，1987；Sen和Frazer，1987)。频谱 WKBJ 方法（Richards，1973；Choy，1977；Cormier和Richards，1977；Frazer，1977）在这里称作为相位积分法。

2. 梯形Filon法

首先考虑积分

$$I_W=\int_\Gamma dp \quad f(p)e^{sg(p)} \tag{2}$$

此积分出现在相位积分法中，这里

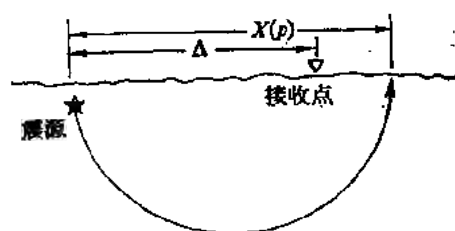
$$g(p)=T(p)+p\Delta-X(p) \tag{3}$$

如图1a所示。$T(p)$和$X(p)$分别是参数p广义射线的走时和距离的函数。Δ是震源与接收处之间的水平距离。积分式(2)也出现在频谱Kirchhoff-Helmholtz方法中，其中$g(p)$是从震源向下到一交接面并折回到接收处的走时，p是交接面上反射点的位置。在相位积分法和频谱Kirchhoff-Helmholtz方法中，s都给定为

$$s=i\omega \tag{4}$$

这里ω是弧度瞬时频率。

常常遇到ω很大，如图2所示，$e^{sg(p)}$随p的变化比$f(p)$或$g(p)$的变化都快得多。因而梯形法的通常求积步长（Dahlquisf和



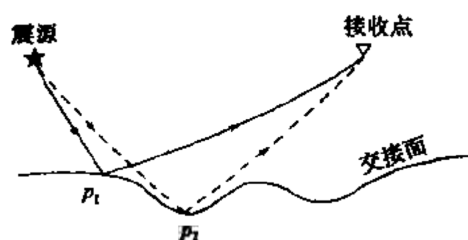


图1 (a)在相位积分法中，积分式(2)中的p是慢度，而(b)在频谱Kirchhoff-Helmhoitz方法中，p是交接面上反射点的位置

Bjorck, 1974)

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p f(p) \mathrm{e}^{sg(p)} \approx \frac{1}{2}(p_2-p_1)(f_1\mathrm{e}^{sg_1}+f_2\mathrm{e}^{sg_2}) \qquad (5)$$

必须取得很小，以能跟踪e^{sg}的振荡。直观地看，这似乎是不合理的。为什么通常多采用对f和g数字化取样来避免混淆它们呢？当然这是不必要的。替代式(5)，可用

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p f(p) \mathrm{e}^{sg(p)} \approx \frac{\delta(p)}{s\delta(g)}\left[\delta(f\mathrm{e}^{sg}) - \frac{\delta(f)\delta(\mathrm{e}^{sg})}{s\delta(g)}\right] \qquad (6)$$

这里$\delta(p)$表示p_2-p_1，$\delta(g)$表示$g(p_2)-g(p_1)$等等。式(6)的右边仅当$\delta(g)$非零时存在。而当$\delta(g)\to 0$时，式(6)的右边趋近于式(5)的右边。推导Filon梯形公式(6)和梯形规则式(5)是类似的。为了导出式(5)，假设$f\mathrm{e}^{sg}$能由在区间(p_1, p_2)上的一个线

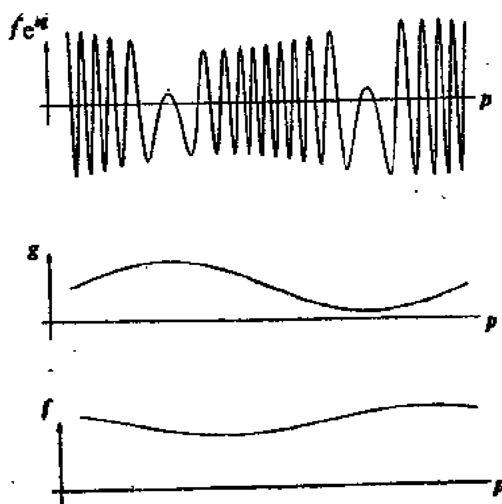


图2 当Im(s)很大时，fe^{sg}可以比g和f变得快得多

性函数近似表示，并用$f_1e^{sg_1}+(p-p_1)\delta(fe^{sg})/\delta(p)$ 替代式 (5) 左边的被积函数；为了导出式(6)，假设f和g能用在区间(p_1, p_2)上的线性函数来近似表示，并用下式替代式(6)左边的被积函数

$$\left[f_1+(p-p_1)\frac{\delta(f)}{\delta(p)}\right]\exp\left\{s\left[g_1+(p-p_1)\frac{\delta(g)}{\delta(g)}\right]\right\}$$

推导有给出高阶项优点的式(6)的不同方法是按要求用分部积分法对式(6)左边进行多次积分。

直接误差分析(Frazer和Gettrust，1984)能用来说明：在给定的精度下，式(5)的步长是比例于$|s|^{-1}$，而式(6)中的步长为$|s|^{-1/2}$。在许多不同的计算机编码中的数值试验对此都已证实。当使用式(6)时，应当记住步长$\delta(p)$必须足够小，使得既不混淆$f(p)$，也不混淆$g(p)$。如果f随p的变化象e^{sg}随p变化那样大，则不存在用式(6)代替式(5)的点。另一方面，式(6)象式(5)一

样精确，且仅约取长于10%来计算。式(5)和(6)都给出一个计算机上矢量化得很好的编码，如Cray。

梯形Filon公式(6)已被推导出，并被应用在Frazer(1977)相位积分中，也应用在Sen和Frazer(1985)及Frazer和Sinton(1984)文章的频谱Kirchhoff-Helmholtz法中。在Frazer和Gettrust(1984)文章中，梯形Filon公式在Filon(1928)之后被称作为“广义Filon方法”。希望这个颇为夸大的名字能促使地震学家开始应用式(6)。在这件事上，多数地震学家的反映类似于Frazer和Gettrust(1984)文章提交发表时对它评议过的一位应用数学家的反映。他说，“一直到我编写它和试验它之前，我不相信这文章的一个字。”到现在，Filon方法已出现许多变化和扩展，致使“梯形Filon”似乎对式(6)来说是较好的名字了。适合于三重积分的梯形Filon规则的一种形式已在Sen和Frazer(1987)中给出。

接着考虑积分

$$u(\omega,\ x)=\int_0^{\infty-i0} k\quad dk\quad \tilde{u}(\omega,\ k)J_n(kx) \tag{7}$$

其中J_n是n阶Bessel函数。k是波数。这个积分在反射率方法中出现(Fuchs和Müller，1971；Kennett，1983)。它的求积可用下面的两个方法简单地完成。

第一个方法适合于在x很大或很小及为零的情况中应用。在这里，优点是取如下的关系，[Olver，1972，式(9.2.19)]。

$$J_n=M_n\cos\theta_n \tag{8}$$

和渐近展开[Olver，1972，式(9.2.29)]。

$$\theta_n=kx-\alpha_n+O(|kx|^{-1}) \tag{9}$$

其中

$$\alpha_n=\frac{1}{4}(2n+1)\pi \tag{10}$$

现式(7)写成这样的形式

$$u(\omega,x)=\int_0^{\infty-i0} dk\quad f_1(k)e^{ixk}+\int_0^{\infty-i0} dk\quad f_2(k)e^{-ixk} \tag{11}$$

函数f_1和f_2给定为

$$f_1(k)=\frac{1}{2}k\tilde{u}(\omega,\ k)M_n e^{i(\theta_n-kx)} \tag{12}$$

$$f_2(k)=\frac{1}{2}k\tilde{u}(\omega,\ k)M_n e^{-i(\theta_n-kx)} \tag{13}$$

方程式(11)是正确的。由于式(9)，函数f_1和f_2相对无振荡。式(11)右边的每一个积分看作为形式(2)，其中$g(k)=k$和$s=\pm ix$，这样，用求积公式(6)就能计算式(11)。

方程式(11)—(13)说明一个重要的一般方法，在计算振荡函数积分中常很有用。用一个不精确的渐近展开来扣除积分部分中大部分相位变化，但最后结果的精度不依赖于渐近展开的精度。同样的方法也常用来降低$\tilde{u}(\omega,\ k)$的变化(Frazer和Gettrust, 1984; Sen等, 1987)。

因为时间关系为$e^{-i\omega t}$，所以当x大于几个波长时，式(11)右边的第二个积分不再有意义，这样，第二个积分常可略去。当kx值大于3时，函数M_n和θ_n采用多项式近似是有效的(Allen, 1954; Olver, 1972, 公式(9.4.3)和(9.4.6))。当kx的值小于3时，M_n和θ_n的正确值可以根据它们的定义计算[Olver, 1972; 式(9.2.17)]，

$$\theta_n\equiv\tan^{-1}(Y_n/J_n) \tag{14}$$

$$M_n\equiv(J_n^2+Y_n^2)^{1/2} \tag{15}$$

但这是不方便的，因为当kx是零时M_n是奇异的。且因为式(14)和(15)要求J_n和Y_n两者用单独的多项式计算。当kx小于3时，要得到θ_n和M_n值，一种较好办法是重新定义，使得它们更方便于计算而还满足式(8)。下面是这样做的一个方法：

$$\theta_0(kx<3)\equiv\frac{\pi}{2}\,\frac{kx(kx-3)}{j_{0,1}(j_{0,1}-3)}+\theta_0(3)\frac{kx(kx-j_{0,1})}{3(3-j_{0,1})} \tag{16a}$$

$$\theta_n(kx<3)\equiv-\frac{1}{2}\pi+e+\frac{1}{3}kx\left(\theta_n(3)+\frac{1}{2}\pi-e\right)\quad(n\geqslant1) \tag{16b}$$

$$
M_0(kx<3)\equiv\begin{cases}\dfrac{\mathrm{POLY}[J_0(kx)]}{\cos\theta_0(kx)} & (|kx-j_{0,1}|\geqslant\delta)\\[2ex] M_0(a_1)+\dfrac{kx-a_1}{a_2-a_1}M_0(a_2) & (|kx-j_{0,1}|<\delta)\end{cases} \tag{17a}
$$

$$
M_n(kx<3)\equiv\frac{\mathrm{POLY}[J_n(kx)]}{\cos\theta_n(kx)}\quad(n\geqslant1) \tag{17b}
$$

在这些关系中$j_{0,1}=2.40482$是J_0的第一个零点；$\epsilon=0.5$是为了当$n\geqslant1$从$-\frac{1}{2}\pi$中移开$\theta_n(0)$的目的，使得M_n在那里将不奇异；$\delta=0.01$；$a_2=j_{0,1}+\delta$；$a_1=j_{0,1}-\delta$及POLY[…]意思是量[…]将用多项式展开计算，在$0\leqslant kx\leqslant3$有效。M_0的定义比M_n的定义更复杂，因为J_0的第一个零点小于3，而$n\geqslant1$时J_n的所有零点都大于3。

“定义”式(16)和(17)的理由是它们使得能够应用形式(11)—(13)和梯形Filon规则式(6)。从$k=0$判断是正确的，而不牺牲精度——记住：式(8)而是由式(16)和(17)维持着。不同的方法是用梯形规则进行从$k=0$到$3/x$积分来计算式(7)，而从$k=3/x$起，用式(11)—(13)，将式(11)积分的下限由0改为$3/x$。这不同的方法不满足编码，因为(a)两个不同的求积方法必须都要编码及(b)积分的范围依赖于源-接收处距离x。如果式(16)和(17)都被应用了，则仅有一个求积法必须编码；这个由小值kx引起的、表面上的困难全被处理在获得$\theta_n(kx)$和$M_n(kx)$的子程序中。

刚刚给出的反射率积分式(7)的过程有点复杂，因为要适应源-接收处距离x值既是大值和小值或是零值的情况。在模拟折射资料的情况，x几乎常常大于4或5个波长。因而可用下面的较简单的方法。在式(12)中，用$kx-\alpha_n$代替θ_n及用$(2/\pi kx)^{1/2}$代替M_n。现在略去式(11)右边的第2个积分，且将第1个积分变量变为$p=k/\omega$。结果是

$$u(\omega, x) \equiv \int_0^{\infty - i0} dp f(p) e^{i\omega x p} \tag{18}$$

这里

$$f(p) = \left(\frac{\omega p}{2\pi}\right)^{1/2} \tilde{u}(\omega, \omega p) e^{-i(2n+1)\pi/4} \tag{19}$$

积分式(18)可用梯形Filon求积公式（6）计算，其中$g(p)=p$和$s=i\omega x$。

当然，式(11)和(18)积分上限实际上不是无限的。如果源和接收点在不同深度大于几个波长，则$\tilde{u}(\omega, \omega p)$的模随$p$的增加超过$\beta_r^{-1}$而迅速衰减到零，这里$\beta_r$是源的剪切波速度。也常用光滑地将$f(p)$通过$p_{max}=1/c_{min}$缩减到零的办法，从理论地震图中排除慢的成分，这里$c_{min}$是要研究的最低相速度。Frazer和Gettrust(1984)给出许多改进例子，即用梯形Filon规则式（6）替代梯形规则式（5）计算式(18)，得到结果。

如有可能，应将反射率积分式（7）的路径保持在Re(k)轴上，这是因为当k离开此轴时，$J_n(kx)$要指数地增大。但在Re(k)轴上的$\tilde{u}(\omega, k)$常有奇异性，所以建议为了去掉这些奇异性，积分路径应当取在Re(k)轴的稍下边。一个较好的方法（Phinney，1965；Bouchon和Aki，1977；Spudich和Ascher，1983）是将积分路径保持在Re(k)轴上，但用有固定虚部a的复值ω。这样$\tilde{u}(\omega, k)$的奇异性移至离开Re(k)轴的第一象限中。最后的合成地震图必要乘以e^{at}（这里t是时间），来恢复它们的正确振幅。在（1）中的外侧积分，应用复ω也能压制在逆Fourier变换中由于太小的积分步长$d\omega$而引起的重叠，复频率的应用在Mallick和Frozer(1987)的文章给予了充分的讨论。

按如下公式，选择一个固定ω的虚部a，

$$a = \frac{1}{T} \ln 50$$

这里T是将要合成的时间系列的长度。这样重复波到达的幅度将

至少降低到1/50。如果引起数值问题，则用40代替50，或增加T。

如果用复频率，为保持k为实数，式(18)中的积分路径应向下转至复p平面的第4象限。将积分式(18)的上限从$\infty - i0$改变为$\exp[-i\arg(\omega)]^{\infty}$。$\arg(\omega)$给定为

$$\arg(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}$$

注意，当式(5)和(6)中所有量都为复数时，公式仍保持有效。在反射率计算编码中，如果式(18)中的步长大小dp形式上是ϵ，则当用复ω时，新的步长大小dp正好是$\epsilon\exp[-i\arg(\omega)]$。

如果源-接收点距离x很大，则梯形Filon公式(6)对反射率合成是有价值的，因为容易编码和很好矢量化。但当x很小时，式(6)没有用处，因为反射率被积函数由于$\bar{u}(\omega, k)$原因，大多数要随k而变化。应用中x常变成很小，或者用式(5)代替式(6)进行编码，或者用另外的Clenshaw-Curtis法求积(见下面的内容)。

3. 不同的方法

本节讨论的两个方法是Filon方法的较新形式，它们比上节讨论过的简单公式更难于编码和矢量化。然而可以预期的，在相继的处理器上它们会比式(6)更有效。当源-接收点距离小于几个波长时，对反射率积分计算，它们一定比式(6)更有效。

第一个不同方法是由Xu和Mal(1985)建议的Clenshaw-Curtis求积的修改形式。此方法更可应用于反射率积分式(11)中。在Clenshaw-Curtis求积中，反射率积分中的函数$k\bar{u}(\omega, k)$不象Filon方法那样用一多项式近似，而是用一系列Chebyshev多项式代替。Xu-Mal方法在这种意义上是自调节的，即必须在其上对$k\bar{u}$进行估计的点数相继被加倍，而不必花费对$k\bar{u}$的事先估计。

有关Clenshaw-Curtis求积法的附加材料在Piessens和Brand-ers(1983)，Oliver(1971)和O'Hara和Smith(1969)文章中给出。

第二个不同的方法是Levin(1982)的方法，由 Davis 和 Rabinowitz(1984)简略地讨论过。这个方法直接可应用到形式(2)的积分。假设积分式(2)有下限p_1和上限p_2。如果式(2)中的$f(p)$能写成为

$$f(p)=sg'(p)q(p)+q'(p) \tag{20}$$

这里$q(p)$是一个待定函数，则式(2)可直接计算为

$$I_W=q(p_2)e^{sg(p_2)}-q(p_1)e^{sg(p_1)} \tag{21}$$

得到$q(p_1)$和$q(p_2)$的一个方法是假设q由一基函数级数给定

$$q(p)=\sum_{m=1}^{n}a_m\varphi_m(p) \tag{22}$$

例如，基函数φ_m可以是一些单项式p^{m-1}。现在，在点p_1, p_2, …, p_n计算$f(p)$, $g(p)$和$\varphi_m(p)$，将式(20)变成n个线性方程系统，有n个未知系数a_1, a_2, …, a_n。当求解这个系统时，$q(p_1)$和$q(p_2)$由式(22)计算并插入式(21)中。为避免大的线性系统的困难，应当再分割积分区间，并在每一个子区间中单独地应用方法，来保持n是低值。

Levin(1982)方法是Filon方法的最一般推广。公式(6)似乎是Levin法的变形，在Levin法中，假设$q(p)$和$g(p)$是线性函数。记住梯形Filon公式(6)是直接用近似f与g为线性函数推得。已设法用高阶多项式近似f和g来推导高阶 Filon 公式。但最终的求积公式含有特殊函数，这些特殊函数使它们的有效性很难判断。Levin 法避免了这些困难，它还有直接可用到重积分中的优点。

第 四 篇

成层介质中的振型法

第一章　计算地震简正振型解的子程序包 Disper80

M. Saito

（东京技术学院应用物理系）

1. 引　言

DISPER80是一个 Fortran 子程序包，它用于计算非旋转完全弹性、横向各向同性及侧向均匀的地球模型的简正振型。基本内容是基于 Takeuchi 和 Saito(1972)所述的算法。此后，有几个算法改进已补充于程序包中。本章轮廓地叙述这些算法，特别强调组合矩阵方法。

2. 横向各向同性地球模型

各向异性的最简单形式是应力-应变关系对称于某一特定轴的情况，且称这种情况为“横向各向同性”。Takeuchi 和 Saito(1972)已经表明横向各向同性介质的振型解可由各向同性介质的解作少许修改来得到。在DISPER80中，假设地球是横向各向同性，取对称轴是垂直的。也假设地球完全弹性、非旋转和侧向均匀。

横向各向同性介质的弹性性质由5个弹性常数给定，按 Love 的记法为A,C,L,N和F(Takeuchi 和 Saito, 1972)。下面公式中将用这5个弹性常数。但在程序包中，以2个弹性波速度和3个各向异性因子作为弹性的独立参数应用。

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\left(\frac{A}{\rho}\right)^{1/2}, \quad \beta=\left(\frac{L}{\rho}\right)^{1/2} \\ \xi=\frac{N}{L}, \quad \varphi=\frac{C}{A}, \quad \eta=\frac{F}{A-2L}\end{array}\right\} \tag{1}$$

这里α是水平偏振P波速度，β是垂直偏振S波速度，ρ是密度。ξ，φ和η是“各向异性因子”。当介质各向同性时，这三个因子全部是1。

DISPER80有一特征位(IA)，它表示地球模型是各向同性或横向各向同性。当特征位除去时(IA=0)，软件包假定模型是各向同性的，略去已给定的各向异性因子。换句话说，如果模型是各向同性的，则各向异性因子不需要给定（当然哑变量是需要的)。另一个特征位IQ表示是否给定了Q模型。当IQ=1时，计算简正振型的耗散因子。

3. 积分法和模型的给定

DISPER80积分下列形式的运动方程

$$\frac{dy}{dr}=Ay \tag{2}$$

这里y是列矢量，A是方形系数矩阵。对于平的模型，Love波运动方程和Rayleigh波运动方程既可以用矩阵法进行积分，也可以用Runge-Kutta-Gill法进行积分。矩阵法的公式可在Takeuchi和Saito(1972)文章中找到。球模型的方程由常用的Runge-Kutta-Gill法进行积分。因为常用的Runge-Kutta-Gill法是四阶的，所以每一步的相对截取误差可近似给定为

$$e=(\nu h)^5/5! \tag{3}$$

这里ν代表A的最大本征值，h是r处的步长大小。积累的相对误差近似地由e乘以积分步的数目给出：

$$E=\frac{(\nu h)^5}{5!}\ \frac{H}{h}\ .$$

这里H是积分区间。为了得到误差的粗略概念，用$2\pi/\nu$定义名义垂直波长 λ，有

$$E=\frac{(2\pi)^5}{120}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4\frac{H}{\lambda} \tag{4}$$

假设积分两倍垂直波长（$H=2\lambda$）的方程达到6位有效数字，这样$E=10^{-6}$。从上述估算中，得到积分步的大小h必须小于垂直波长的1%。

不管它的明显低效率，Runge-Kutta-Gill法在DISPER80中已作为主要积分器被采用，这是因为它是自起动的，且比更复杂的积分器(如Fehlberg法)要求较简单的网格工作。Runge-Kutta-Gill法只要求在必须求出函数值的格点之间有一个辅助格点。因而模型参数应当从表面开始，以等间隔的各深度点上成对地给定。下面给出一个模型给定的例子。

深度	h_i	a_i	
0	7.5	5.5	…
7.5	7.5	6.0	…
15.0	7.5	6.5	…
22.5	7.5	7.0	…
30.0	0.0	7.5	…
30.0	10.0	8.2	…
40.0	10.0	…	…
50.0			

注意，h_i代表模型中的网格间隔，不是Runge-Kutta-Gill法中的步长大小。还注意，h_i测量自现格点开始到下一格点的间距。因而给定间断面上侧(此例子中为第五个点)格点上$h_i=0$。在这个例子中，将在深度点0，15，30，50km等处，计算本征函数，且这些值将用来计算能量积分和偏导数。Simpson公式用来计算能量积分，且这个公式要求：被积函数在三个相继的等间隔点上有效。这就是在上述例子中为何将第一个30km分成为4个7.5km厚的

层。

矩阵法能用来积分在横向各向同性层模型中的 Love 波方程及各向同性成层模型中的 Rayleigh 波方程。"成层"的意思是模型有一叠均匀层。因而模型参数按每一均匀层给定，而不象在 Runge-Kutta-Gill法中以每一网格点给定。

3.1 参数的单位

在DISPER80中隐含着假设：按现在的习惯，长度单位为km，速度单位为$km \cdot s^{-1}$，及密度单位为$g \cdot cm^{-3}$。因而时间单位是s，角频率单位是$rad \cdot s^{-1}$及应力单位为$10^{10} c \cdot g \cdot s$。然而，用户可选择长度、速度、密度的不同单位，并由此导出时间、密度和其他量的单位。

必须给定重力单位和万有引力常数G的单位，重力的标准单位是$km \cdot s^{-2}$，G的相应值为$6.673 \times 10^{-8} cm^3 \cdot g^{-1} \cdot s^{-2}$。

4. 扭转振荡

4.1 运动-应力矢量定义

定义径向函数，或者用Aki和Richards(1980)书中的术语，运动-应力矢量$y(r)=[y_1(r) \quad y_2(r)]^T$，对于扭转振型有

$$\left.\begin{aligned} u &= y_1(r)\nabla \times [\hat{r}Y_l(\theta, \phi)] \\ \sigma_r &= y_2(r)\nabla \times [\hat{r}Y_1(\theta, \phi)] \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

这里(r, θ, ϕ)是球极坐标，u是在$r=\text{const}$处球表面上的位移矢量，σ_r是应力矢量，$Y_l(\theta, \phi)$是l阶面球谐函数及$\hat{r}$是径向的单位矢量。因为侧向均匀非旋转地球模型的本征值对方位波数是退化的，所以不必要给出$Y_l(\theta, \phi)$的方位阶数。假定时间关系为$e^{-i\omega t}$且将不列出。注意，本定义和通常定义之间有一个r因子之差。因而Aki和Richards书中(1980，431页)的$W(r)$和$T(r)$与现在

的 y 的关系是

$$W(r)=\frac{y_1(r)}{r},\quad T(r)=\frac{y_2(r)}{r}$$

能用运动-应力矢量以熟知的形式写出运动方程

$$\frac{d}{dr}\mathbf{y}(r)=\mathbf{A}(r)\mathbf{y}(r) \tag{6}$$

这里

$$\mathbf{A}(r)=\begin{bmatrix} 2/r & 1/L \\ -\rho\omega^2+\frac{(l-1)(l+2)N}{r} & -2/r \end{bmatrix} \tag{7}$$

因子 r 已被引入到系数的反对称影响中，$a_{22}=-a_{11}$。

DISPER80中，方程从给定的深度起，用Runge-Kutta-Gill法向上进行积分，一直到自由表面，看边界条件是否满足（投射法）。y 的初始值给定为

$$y_1(b)=1,\ y_2(b)=0$$

这里 b 为外核半径。对于较高频率，可能从地幔内部某处开始进行积分。然后假定起始深度以下的层是各向同性和均匀的，计算 y 的初始值。公式可参看Takeuchi 和 Saito 的文章。在球状Rayleigh 波和 Love 波振型计算中，将会得到类似的方法，这将在较后的几节中提出。

在自由表面 $r=a$ 上，切向应力为零的边界条件要求

$$y_2(a)=0 \tag{8}$$

因而 $y_2(a)$ 可以用作为扭转振荡的特征函数。在给定的角阶数 l 情况下，找出 $y_2(a)$ 的零点。但因为 $y_2(a)$ 的大小强烈地与积分开始的深度有关，所以采用

$$\Delta_T(\omega,l)=\frac{y_2(a)}{y_1(a)} \tag{9}$$

作为扭转振型特征函数。这在 $y_1(a)=0$ 处引入了人为的奇异性，但因为 $y_2(a)$ 的零点与 $y_1(a)$ 的零点分开得很清楚，所以在求根过程中，分母不会引起困难。上述定义的另一个优点是：因为特征

函数仅依赖于各个 y 间之比，这样能在积分过程中测量 y 值，以防止它们涨溢，而不影响特征函数值。

4.2 能量积分关系

一旦得到本征值，相应的平均Lagrange算子由下式计算

$$\langle L\rangle=\omega^2 I_1-I_2=-[y_1 y_2]_a \tag{10}$$

这里

$$I_1=\int_0^a \rho y_1^2 \mathrm{d}r$$

$$I_2=\int_0^a\left[\frac{1}{L}y_2^2+\frac{(l-1)(l+2)N}{r}y_1^2\right]\mathrm{d}r \tag{11}$$

式(10)右边为边界值，当 ω 为一本征值时是当然零点。

在较早编的程序包中，通过Lagrange能量积分计算群速度 U

$$U=\frac{a^2 I_3}{c I_1} \tag{12}$$

这里，c 是相速度，

$$c=\frac{\omega a}{l+\frac{1}{2}} \tag{13}$$

$$I_3=\int_0^a \frac{N}{r}y_1^2 \mathrm{d}r。 \tag{14}$$

在DISPER80中，另一方面，群速度也是通过 y 的偏导数来计算的，象下面叙述的那样。

4.3 函数y对l和ω的导数

相当于 l 阶自由振荡的面波群速度给定为

$$U=-\frac{\partial y_2(a)}{\partial l}\Big/\frac{\partial y_2(a)}{\partial(\omega a)} \tag{15}$$

这里的导数沿着频散曲线在$y_2(a)=0$处取定。公式表明，能用计算$y_2(a)$对l和ω的偏导数来计算群速度，而代替计算I_1和I_3。

首先，对基本方程式(6)进行l和ω微商得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(l\frac{\partial y(r)}{\partial l}\right)&=\mathrm{A}(r)\left(l\frac{\partial y(r)}{\partial l}\right)+l\frac{\partial \mathrm{A}(r)}{\partial l}y(r)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\omega\frac{\partial y(r)}{\partial \omega}\right)&=\mathrm{A}(r)\left(\omega\frac{\partial y(r)}{\partial \omega}\right)+\omega\frac{\partial \mathrm{A}(r)}{\partial \omega}y(r)\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

方程式(6)和(16)构成关于$y(r)$，$l\partial y(r)/\partial l$ 和 $\omega\partial y(r)/\partial\omega$ 的一个一阶微分方程组，总共为六个方程。A的偏导数用式(7)能很容易计算，这里已经选用$l\partial y/\partial l$和 $\omega\partial y/\partial\omega$ 作为相关变量而代替单独偏导数，这样新引进的相关变量会有与原来的相同的量纲。

计算群速度式(15)所必须的偏导数表面值，可同时积分上述三组方程得到。积分式(16)，需要偏导数的初始值。当从核-幔边界开始，因为$y(b)$不依赖于l或ω，它们是平凡解。当在地幔中开始积分，用向前有限差分近似计算起始点的偏导数。

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x+\mathrm{d}x)-f(x)}{\mathrm{d}x}$$

这里$f(x)$是各向同性和均匀球体的解析解，且x代替参数l或 ω。在DISPER80中，试验性地取$\mathrm{d}x$为x的十分之一，即$\mathrm{d}x=\frac{1}{10}x$。

能量积分I_1也能用在 l 为常量处微分式(10)的办法，从偏导数中算得。有

$$2\omega I_1=-\left[y_1\frac{\partial y_2}{\partial\omega}-y_2\frac{\partial y_1}{\partial\omega}\right]。$$

沿着 $y_2(a)=0$，有

$$2\omega^2 I_1=-\left[y_1\omega\frac{\partial y_2}{\partial\omega}\right]。\tag{17}$$

为使I_1与归一化$y_1(a)=1$一致，必须将式(17)的右边用$[y_1(a)]^2$相除。

4.4 扭转振荡程序说明

DISPER80 中扭转部分的核心由两个子程序组成：即TORRKG 和 TOREFR。TORRKG 积分基本运动方程式(6)和(16)，而TOREFR计算本征值、能量积分和有关弹性参数的一个

本征值的偏导数。为了找到一个本征值，仅需调用TORDSP，它依次调用TORRKG，并作必要的内插。TORDSP 的输出包含一个本征值、按式(15)的相应的群速度和按式(17)的平均 Lagrange 算子中的运动学部分$2\omega^2 I_1$。为了加快计算速度，在本征值已定在预定的误差范围内之后，仅对式(16)作一次积分。

TOREFR的输出包含本征函数$y_1(r)$和$y_2(r)$、能量积分$2\omega^2 I_1$、由能量积分式(12)计算的群速度及本征函数的偏导数。本征函数被归一化到

$$y_1(a)=1 \tag{18}$$

且能量积分也按此归一化计算。

TOREFR有一特征位IQ，它表示用户是否提供了有Q结构程序，当IQ在工作时(IQ=1)，程序计算振型的瞬时衰减因子。

为了判断的目的，也计算了

$$e=1-\frac{I_2}{\omega^2 I_1} \tag{19}$$

如果本征值和本征函数计算正确，则$e=0$(见式(10))。然而，e不是一个很好的精度指标。因为 Lagrange 算子相对于 y 的变化是稳定的，所以，甚至当本征值和本征函数计算得不正确时，也很容易为零。另一个指标是分别由TORRKG和TOREFR计算出的群速度和动能之差。

5. 非重力地球模型的球状振荡

5.1 运动-应力矢量的定义

固体层

在非重力地球的固体层内，球状振荡的运动-应力矢量的分量给定为

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \frac{1}{r} y_1(r) [\hat{r} Y_l(\theta, \phi)] + y_3(r) \\
&\quad \times \nabla\left[\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}} Y_l(\theta, \phi)\right] \\
\sigma_r &= \frac{1}{r} y_2(r) [\hat{r} Y_l(\theta, \phi)] + y_4(r) \\
&\quad \times \nabla\left[\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}} Y_l(\theta, \phi)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

如在式(5)那样，现在的 y 与习惯上的 y 有一个 r 因子之差。按近来的习惯，也已引进因子 $[l(l+1)]^{1/2}$(Aki和Richards, 1980)。

由四矢量 y 表示的运动方程，再次由式(6)表示，它的系数矩阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$：

$$
\left.\begin{aligned}
& a_{11} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2F}{C}\right), \quad a_{12} = \frac{1}{C} \\
& a_{13} = \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} \frac{F}{C} \\
& a_{21} = -\rho\omega^2 + \frac{4}{r^2}\left(A - \frac{F^2}{C} - N\right), \quad a_{22} = -a_{11} \\
& a_{23} = -\frac{2[l(l+1)]^{1/2}}{r^2}\left(A - \frac{F^2}{C} - N\right) \\
& a_{24} = \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} \\
& a_{31} = -a_{24}, \quad a_{33} = \frac{2}{r}, \quad a_{34} = \frac{1}{L} \\
& a_{41} = a_{23}, \quad a_{42} = -a_{13} \\
& a_{43} = -\rho\omega^2 + \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r^2}\left(A - \frac{F^2}{C}\right) \\
& \quad - \frac{2N}{r^2}, \quad a_{44} = -a_{33}
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

其他元素都为零。注意系数矩阵有许多对称性。

开始假设地球无液体核，系数矩阵为式(21)的四阶方程式(6)，有两个独立解 $y_1(r)$ 和 $y_2(r)$，它们在球心 $r=0$ 处是正则的。

因此在球心任何正则解是这两个解的线性组合。由于在地球的最外表面的应力分量必须为零，球状振荡的频散方程给定为

$$y_2(a)=Ay_{21}(a)+By_{22}(a)=0$$

$$y_4(a)=Ay_{41}(a)+By_{42}(a)=0$$

或

$$\begin{vmatrix} y_{21}(a) & y_{22}(a) \\ y_{41}(a) & y_{42}(a) \end{vmatrix}=0 \tag{22}$$

这里$y_{ij}(r)$代表第 j 个解的第 i 个分量；即是 $y_i(r)=[y_{i1}(r)\ y_{i2}(r)]^T$，$A$，$B$是积分常数。

液体层

在液体层($L=0$)，式(6)的第 3 个方程变为恒等式，且由第 4 个方程，得到

$$y_3(r)=-\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{\rho\omega^2 r}y_2(r) \tag{23}$$

这里已经假设各向同性($A=C=F$)。用这个式子，可将式(6) 的第一个方程中y_3消去，得到二阶微分方程，其系数矩阵

$$\mathbf{A}(r)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & \frac{1}{C}-\frac{l(l+1)}{\rho\omega^2 r^2} \\ -\rho\omega^2 & 1/r \end{bmatrix} \tag{24}$$

因为方程是二阶的，则有两个线性独立解。但在地球中心的正则性条件排除了在中心是奇异的一个解，因而仅得到一个正则解。

5.2 组合-矩阵法

地球球状振荡的频散关系是由在固体自由表面的二阶行列式方程式 (22) 给出。这是熟知的，即求解基本解 y_{ij} 和形成行列式(22)是一个数值不稳定的方法。因此在许多文章中已经建议直接积分频散函数(Gilbert 和Backus，1966，Dunkin；1965，Abo-Zena，1979)。这些方法基本上等效于Gilbert 和 Backus(1966)提出的方法，且也出现在早期编写的程序包中(Takeuchi和Saito，1972)。

定义从系数矩阵为式(21)的式(6)两个独立解得到的二阶子行列式

$$Y_{ij}(r)=\begin{vmatrix} y_{i1}(r) & y_{i2}(r) \\ y_{j1}(r) & y_{j2}(r) \end{vmatrix} \quad (25)$$

这里 $(ij)=(12)$，(13)，(14)，(23)，(24)和(34)。很清楚，$Y_{24}(a)$是球状振荡的特征函数（式(22)）。微分上面方程并应用式(21)，得到$Y_{ij}(r)$也满足类似于式(6)的线性方程组：

$$\frac{d}{dr}Y_{ij}(r)=\sum_k[a_{ik}(r)Y_{kj}(r)+a_{jk}(r)Y_{ik}(r)] \quad (26)$$

已经看到6个Y的一阶导数不全是独立的(Takeuchi和Saito，1972)。因为y在$r=0$正则，有

$$Y_{12}(r)+Y_{34}(r)=0 \quad (27)$$

它将式(26)降低到5阶系统。

5阶方程式(26)通过固体层可积分。组合$Y_{ij}(r)$的初始值已从基本解$y_{ij}(r)$的相应均匀球体近似中算得(Takeuchi和Saito，1972)。留下的问题是，让解通过固体-液体交接面连续，因为组合矩阵法在液体层中是失效的，这将在后面讨论。

组合矩阵Y的元素与原方程解y之间有几个有意义的关系。因为任何y都可用基本解y_i的线性组合写出，有

$$\left.\begin{aligned} y_i&=Ay_{i1}+By_{i2} \\ y_j&=Ay_{j1}+By_{j2} \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

这里A和B是独立于r的积分常数。从上面方程求解A和B并代到类似的方程，得到

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_l \end{bmatrix}=\frac{1}{Y_{ij}}\begin{bmatrix} Y_{kj} & Y_{ik} \\ Y_{lj} & Y_{il} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \end{bmatrix} \quad (29)$$

因而有恒等式

$$\begin{bmatrix} Y_{il} & Y_{ki} \\ Y_{jl} & Y_{kj} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{kj} & Y_{ik} \\ Y_{lj} & Y_{il} \end{bmatrix}=Y_{ij}Y_{kl}I \quad (30)$$

这里I是2×2单位矩阵。

关系式(29)可用于许多不同的情况。假设加上$y_4(r)=0$的约束，这确定了比值A/B，因而也确定两个基本解的相对大小。从式(29)，有

$$\left.\begin{aligned} y_1(r)&=\frac{Y_{14}(r)}{Y_{24}(r)}y_2(r) \\ y_3(r)&=\frac{Y_{34}(r)}{Y_{24}(r)}y_2(r)=\frac{Y_{34}(r)}{Y_{14}(r)}y_1(r) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

在固体自由表面上有$y_2(a)=0=y_4(a)$，及因为在式(31)中第二个条件已被满足时，这样球状振型的频散关系是

$$\Delta_{NG}(\omega,l)=\frac{Y_{24}(a)}{Y_{14}(a)} \tag{32}$$

这是与Y大小无关的。第二个方程是用来确定自由表面上本征函数的初始值。

5.3 通过固体-液体交接面解的连续

因为组合Y在液体层中无定义，所以，通过固体-液体交接面时，必须从Y转换到y，且反之亦然。首先，考虑一个固体至液体的交接面，那面从解Y转换到解y。因为在交接面上，应力的剪切分量必须为零，且y_1和y_2在交接面上是连续的，从式(31)有

$$y_1^L(r)=\frac{Y_{14}^S(r)}{Y_{24}^S(r)}y_2^L(r) \tag{33}$$

这里上标S代表交接面上固体一侧的解，而上标L表示交接面液体一侧的解。因为对于计算频散函数来说，公共因子是不重要的(式(32))，可以取

$$y_1^L(r)=Y_{14}^S(r),\quad y_2^L(r)=Y_{24}^S(r) \tag{34}$$

另一方面，从液体层积分至一固体层时，在交接面的液体一侧，仅有y_1和y_2。但因为在交接面上位移的剪切分量可以是非零值，所以在固体一侧，有两个独立解：

$$\begin{aligned} &y_{11}^S=y_1^L, \quad y_{21}^S=y_2^L, \quad y_{31}^S=0, \quad y_{41}^S=0 \\ &y_{12}^S=0, \quad y_{22}^S=0, \quad y_{32}^S=1, \quad y_{42}^S=0 \end{aligned}$$

从这一组解，在固体层有子行列式的分量：

$$Y_{13}^{S}=y_1^{L},\quad Y_{23}^{S}=y_2^{L},\quad 其他情况Y_{ij}^{S}=0 \tag{35}$$

5.4 本征函数的计算

特征方程的根能由上述算法确定，但剩下的是要求寻得相应的本征函数，Ng和Reid(1979a，b)建议一个方法，它基本上与式(29)有关。可用式(29)从式(21)中消去 y 中的二个，因而方程变成为有已知系数用Y表示的二阶方程，且能向上或向下积分这些方程。但最后的微分方程的稳定性与选择相关变量有关。有时，有必要从一套相关变量转换到另一套，来避免系数的奇异性。因此，选择Harvey(1977)提出的方法。

首先向上积分组合矩阵 Y。因为必须向上对它们积分来得到本征值。一旦得到本征值，使得在每一个其他深度点上，相应的 Y 函数都有效。为了求得相应的本征函数，从自由表面向下积分原方程式(6)和(21)，且从式(31)给出的初始值开始。现在，窍门是始终不积分方程，而是在每一积分步之后，用式(29)计算过的变量：

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \end{bmatrix}=\frac{1}{Y_{13}}\begin{bmatrix} Y_{23} & Y_{13} \\ Y_{12} & Y_{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{36}$$

代替四个变量y_i中的两个。因为向下积分时，原方程是不稳定的，因而这里主要之点就是，用向上积分得到的 Y_{ij} 对每一步作校正。发现这种方法是很有效和稳定的。经验表明，甚至用单精度算术也能很精确地计算本征函数。

通过固体至液体交接面的连续法是明显的，这因为仅是 y_1和y_2 通过液体层时需要重新作积分。通过液体到固体边界的连续也是简单的，记住式(31)在 $y_4=0$ 的限制下推导出，此限制在交接面上必会遇到。因而

$$y_3^{S}=-\frac{Y_{12}^{S}}{Y_{14}^{S}}y_1^{S} \tag{37}$$

其中$y_1^S = y_1^L$，$y_2^S = y_2^L$和$y_4^S = 0$，完全确定了固体层顶上的本征函数。

5.5 能量积分关系

一旦得到本征函数，平均Lagrange算子和群速度按下式计算

$$
\left.
\begin{aligned}
&\langle L\rangle = \omega^2 I_1 - I_2 = -[y_1' y_2 + y_2 y_4]. \\
&I_1 = \int_0^a \rho (y_1^2 + y_3^2)\,\mathrm{d}r \\
&I_2 = \int_0^a \Big\{ \frac{1}{C} y_2^2 + \frac{1}{L} y_4^2 + \frac{1}{r^2}\Big(A - \frac{F^2}{C} - N\Big) \\
&\qquad [2y_1 - [l(l+1)]^{1/2} y_3]^2 \\
&\qquad + \frac{(l-1)(l+2)N}{r^2} y_3^2 \Big\}\mathrm{d}r \\
&U = a^2 I_3 / c I_1 \\
&I_3 = \int_0^a \Big\{ \frac{1}{r^2}\Big(A - \frac{F^2}{U}\Big) y_3^2 + \frac{1}{r[l(l+1)]^{1/2}} \\
&\qquad \times \Big[y_1 y_4 - \frac{F}{C} y_2 y_3 - \frac{2}{r}\Big(A - \frac{F^2}{C} - N\Big) y_1 y_3 \Big] \Big\}\mathrm{d}r
\end{aligned}
\right\}
\tag{38}
$$

同时，一阶转动分裂因子由下式计算

$$
\beta = \frac{I_5}{I_1}, \quad I_5 = \int_0^a \rho y_3 \{2[l(l+1)]^{1/2} y_1 + y_3\}\,\mathrm{d}r \tag{39}
$$

注意，在本征函数中的一阶扰动$\delta\omega$由下式给定

$$
\frac{\delta\omega}{\omega} = m \frac{\beta}{l(l+1)\omega} \frac{\Omega}{\omega} \tag{40}
$$

这里Ω是地球每日自转的角速度(Dahlen, 1976)。

5.6 组合矩阵的偏导数

象在扭转振荡的情况那样，能计算群速度和平均动能而不求助于式(38)中的定积分。将基本方程式(28)写成矩阵形式，为

$$\frac{d}{dr}Y(r)=B(r)Y(r) \tag{41}$$

这里Y是由子行列式Y_{ij}组成的 5 元素矢量，以l和ω对方程微商，得到类似于式(16)的方程。因而积分这些方程，得到Y对l和ω 的偏导数。由这些能计算

$$U=-\frac{\partial Y_{24}(a)}{\partial l}\Big/\frac{\partial Y_{24}(a)}{\partial(\omega a)} \tag{42}$$

为推导动能I_1的公式，将式(38)沿着$y_4(a)=0$对ω进行微商，得到

$$2\omega I_1=-\left[y_1\frac{\partial y_2}{\partial\omega}-y_2\frac{\partial y_1}{y\omega}\right].$$

沿着$y_4(a)=0$，从式(29)有$y_2(a)=[Y_{24}(a)/Y_{14}(a)]y_1(a)$，因而有

$$2\omega^2 I_1=-\left[y_1^2\frac{\omega}{Y_{14}}\ \frac{\partial Y_{24}}{\partial\omega}\right]. \tag{43}$$

因为通常归一化本征函数，$y_1(a)=1$，故因子$y_1^2(a)$是不重要的。

5.7 非重力球状振荡程序的说明

非重力球状振型程序包的结构与扭转振型是等同的，除去一些细微的差异外（例如 P 波速度必须给定），NOGDSP 控制 NOGRKG，且它的输出包括本征值、群速度和动能。为了计算本征值的偏导数，调用NOGEFR，它的输出包括群速度、动能、按式(39)定义的分裂因子及特定情况下的瞬时耗散因子。

6. 自重地球的球状振荡

6.1 运动-应力矢量的定义

固体层

$y_1,\cdots,y_4$的定义与非重力球状振型的定义(式(20))等同。进

一步定义y_5和y_6如下

$$\left.\begin{aligned}&\psi=\frac{1}{r}y_5(r)Y_l(\theta,\phi)\\&y_6=(4\pi G)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}y_5-4\pi G\rho y_1+\frac{l}{r}y_5\right)\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

这里ψ是重力位的扰动，G是万有引力常数，y_6是这样定义，即在自由表面上消失，$y_6(a)=0$。在y_6定义中，因子$(4\pi G)^{-1}$的引入是为了改善系数的对称性，系数矩阵A的元素如下(其他元素均为零)：

$$\left.\begin{aligned}&a_{11}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{2F}{C}\right),\quad a_{12}=\frac{1}{C}\\&a_{13}=\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r}\;\frac{F}{C}\\&a_{21}=-\rho\omega^2+\frac{4}{r^2}\left(A-\frac{F^2}{C}-N-\rho g r\right)\\&a_{22}=-a_{11}\\&a_{23}=-\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r^2}\left[2\left(A-\frac{F^2}{C}-N\right)\right.\\&\qquad\left.-\rho g r\right],\quad a_{24}=\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r}\\&a_{25}=\frac{(l+1)\rho}{r},\quad a_{26}=-4\pi G\rho\\&a_{31}=-a_{24},\quad a_{33}=\frac{2}{r},\quad a_{34}=\frac{1}{L}\\&a_{41}=a_{23},\quad a_{42}=-a_{13}\\&a_{43}=-\rho\omega^2+\frac{1}{r^2}\left[l(l+1)\left(A-\frac{F^2}{C}\right)\right.\\&\qquad\left.-2N\right],\quad a_{44}=-a_{33}\\&a_{45}=-\frac{[l(l+1)]^{1/2}\rho}{r}\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned}&a_{51}=-a_{26},\quad a_{55}=-\frac{l}{r},\quad a_{56}=4\pi G\\&a_{61}=a_{25},\quad a_{63}=a_{45},\quad a_{66}=-a_{55}\end{aligned}\right\}$$

这里$g(r)$代表重力，系统是6阶的，它有3个线性独立解，这些解在$r=0$是正则的。象前面所述，在自由表面，y_6必须消失。因而自由表面的边界条件是

$$y_2(a)=Ay_{21}(a)+By_{22}(a)+Cy_{23}(a)=0$$
$$y_4(a)=Ay_{41}(a)+By_{42}(a)+Cy_{43}(a)=0$$
$$y_6(a)=Ay_{61}(a)+By_{62}(a)+Cy_{63}(a)=0$$

或

$$\begin{vmatrix}y_{21}(a)&y_{22}(a)&y_{23}(a)\\y_{41}(a)&y_{42}(a)&y_{43}(a)\\y_{61}(a)&y_{62}(a)&y_{63}(a)\end{vmatrix}=0$$

液体层

在各向同性液体层中($L=N=0$, $A=C=F$)，第3个方程变成恒等式，具有系数矩阵式(45)的式(6)中的第4个方程可解出y_3：

$$y_3=\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{\omega^2 r}\left(gy_1-\frac{1}{\rho}y_2-y_5\right)\tag{47}$$

将此关系代入其余方程时，得到一个4阶方程，它的系数是

$$\left.\begin{aligned}&a_{11}=-\frac{1}{r}+\frac{l(l+1)g}{\omega^2r^2},\quad a_{12}=\frac{1}{C}-\frac{l(l+1)}{\rho\omega^2r^2}\\&a_{15}=-\frac{l(l+1)}{\omega^2r^2}\\&a_{21}=-\rho\omega^2-\frac{4\rho g}{r}+\frac{l(l+1)\rho g^2}{\omega^2r^2},\quad a_{22}=-a_{11}\\&a_{25}=\frac{(l+1)\rho}{r}-\frac{l(l+1)\rho g}{\omega^2r^2},\quad a_{26}=-4\pi G\rho\\&a_{51}=-a_{26},\quad a_{55}=-\frac{l}{r},\quad a_{56}=4\pi G\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{61}=a_{25},\quad a_{63}=-a_{15},\quad a_{65}=\frac{l(l+1)\rho}{\omega^2 r^2} \\ &a_{66}=-a_{65} \end{aligned}\right\}$$

6.2 组合矩阵

固体层

定义由三个6元素矢量$y_i=[y_{i1}\ y_{i2}\ y_{i3}]^T$构成的三阶子行列式

$$Y_{ijk}=\begin{vmatrix} y_{i1} & y_{i2} & y_{i3} \\ y_{j1} & y_{j2} & y_{j3} \\ y_{k1} & y_{k2} & y_{k3} \end{vmatrix} \tag{49}$$

一般说来，有$_6C_3=20$个线性独立的子行列式，但对于球状振荡仅有14个子行列式是独立的。已经证明，任何两个线性独立的正则解满足下列恒等式(Takeuchi和Saito，1972)：

$$(y_{11}y_{21}-y_{12}y_{21})+(y_{31}y_{42}-y_{32}y_{41})+(y_{51}y_{62}-y_{52}y_{61})=0 \tag{50}$$

注意括号中的每一项是$Y_{i12}Y_{i34}$和Y_{i56}中的一个2阶子行列式。因而得到

$$Y_{i12}+Y_{i34}+Y_{i56}=0 \tag{51}$$

或写成显式

$$\left.\begin{aligned} Y_{134}+Y_{156}&=0 \\ Y_{234}+Y_{256}&=0 \\ Y_{123}+Y_{356}&=0 \\ Y_{124}+Y_{456}&=0 \\ Y_{125}+Y_{345}&=0 \\ Y_{126}+Y_{346}&=0 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

用直接计算，能够证明子行列式满足线性微分方程

$$\frac{d}{dr}Y_{ijk}=\sum_l(a_{il}Y_{ljk}+a_{jl}Y_{ilk}+a_{kl}Y_{ijl}) \tag{53}$$

为了用户方便，14个独立方程列在下面：

$$\frac{d}{dr}Y_{123}=a_{33}Y_{123}+a_{34}Y_{124}-a_{24}Y_{134}-a_{25}Y_{135}-a_{26}Y_{136}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{124}=a_{43}Y_{123}-a_{33}Y_{124}+a_{45}Y_{125}+a_{23}Y_{134}-a_{25}Y_{145}$$

$$-a_{26}Y_{146}-a_{13}Y_{234}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{125}=a_{55}Y_{125}+a_{56}Y_{126}+a_{26}Y_{134}+a_{23}Y_{135}+a_{24}Y_{145}$$

$$-a_{13}Y_{235}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{126}=a_{45}Y_{123}-a_{55}Y_{126}-a_{25}Y_{134}+a_{23}Y_{136}+a_{24}Y_{146}$$

$$-a_{13}Y_{236}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{134}=a_{13}Y_{123}+a_{11}Y_{134}+a_{45}Y_{135}+a_{12}Y_{234}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{135}=(a_{11}+a_{33}+a_{55})Y_{135}+a_{56}Y_{136}+a_{34}Y_{145}+a_{12}Y_{235}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{136}=(a_{11}+a_{33}-a_{55})Y_{136}+a_{34}Y_{146}+a_{12}Y_{236}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{145}=-2a_{13}Y_{125}+a_{43}Y_{135}+(a_{11}-a_{33}+a_{55})Y_{145}$$

$$+a_{56}Y_{146}+a_{12}Y_{245}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{146}=-2a_{13}Y_{126}-2a_{45}Y_{134}+a_{43}Y_{136}$$

$$+(a_{11}-a_{33}-a_{55})Y_{146}+a_{12}Y_{246}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{234}=a_{23}Y_{123}+a_{24}Y_{124}-a_{25}Y_{125}-a_{26}Y_{126}$$

$$+a_{21}Y_{134}-a_{11}Y_{234}+a_{45}Y_{235}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{235}=-2a_{26}Y_{123}+2a_{24}Y_{125}+a_{21}Y_{125}+a_{21}Y_{135}$$

$$+(-a_{11}+a_{33}+a_{55})Y_{235}+a_{56}Y_{236}+a_{34}Y_{245}$$

$$\frac{d}{dr}Y_{236}=2a_{25}Y_{123}+2a_{34}Y_{126}+a_{21}Y_{136}$$

$$+(-a_{11}+a_{33}-a_{55})Y_{236}+a_{34}Y_{246}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}Y_{245}=-2a_{26}Y_{124}-2a_{23}Y_{125}+a_{21}Y_{145}+a_{43}Y_{235}$$

$$+(-a_{11}-a_{33}+a_{55})Y_{245}+a_{56}Y_{246}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}Y_{246}=2a_{25}Y_{124}-2a_{23}Y_{126}+a_{21}Y_{146}-2a_{45}Y_{234}$$

$$-(a_{11}+a_{33}+a_{55})Y_{246}$$

这里6个组合矩阵元素已用式(52)消去。

组合元素和运动-应力矢量元素之间的关系象在非重力球状振型情况一样将被求得。因为一个任意正则解是3个基本解的线性组合，有

$$\begin{bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_{i1} & y_{i2} & y_{i3} \\ y_{j1} & y_{j2} & y_{j3} \\ y_{k1} & y_{k2} & y_{k3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \tag{54}$$

求解积分常数$[A\ \ B\ \ C]$，并将这些常数代入y_l的方程中，得到

$$y_l=[Y_{ljk}\ \ Y_{ilk}\ \ Y_{ijl}][y_i\ \ y_j\ \ y_k]^{\mathrm{T}}/Y_{ijk} \tag{55}$$

应用下列恒等式：

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_5 \end{bmatrix}=\frac{1}{Y_{246}}\begin{bmatrix} Y_{146} & -Y_{126} & Y_{124} \\ Y_{346} & Y_{236} & -Y_{234} \\ -Y_{456} & Y_{256} & Y_{245} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \\ y_6 \end{bmatrix} \tag{56}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_4 \\ y_6 \end{bmatrix}=\frac{1}{Y_{135}}\begin{bmatrix} Y_{235} & Y_{125} & -Y_{123} \\ -Y_{345} & Y_{145} & Y_{134} \\ Y_{356} & -Y_{156} & Y_{136} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ y_5 \end{bmatrix} \tag{57}$$

当式(57)被代入式(56)的右边时，得到一个这样形式的恒等式

$$\begin{bmatrix} Y_{ljk} & Y_{ilk} & Y_{ijl} \\ Y_{mjk} & Y_{imk} & Y_{ijm} \\ Y_{njk} & Y_{ink} & Y_{ijn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{imn} & Y_{lin} & Y_{lmi} \\ Y_{jmn} & Y_{ljn} & Y_{lmj} \\ Y_{kmn} & Y_{lkn} & Y_{lmk} \end{bmatrix}=Y_{ijk}Y_{lmn}I \tag{58}$$

这里I是3×3阶单位矩阵。

根据式(46)，显然可用$Y_{146}(a)$做为重力球状振型的特征函数，但我们更愿用下式定义特征函数

$$\Delta_{SPH}(\omega, l)=Y_{246}(a)/Y_{146}(a) \tag{59}$$

这是沿$y_4(a)=0=y_6(a)$的$y_2(a)/y_1(a)$，且与比例尺无关。

液体层

在一液体层中的组合矩阵再一次由式(25)定义，其中$(ij)=(12)$，(15)，(16)，(25)，(26)，(56)。类似的论证给出

$$Y_{12}+Y_{56}=0 \tag{60}$$

及控制方程给出为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dr}Y_{12}&=a_{25}Y_{15}+a_{26}Y_{16}-a_{15}Y_{25}\\
\frac{d}{dr}Y_{15}&=(a_{11}+a_{55})Y_{15}+a_{56}Y_{16}+a_{12}Y_{25}\\
\frac{d}{dr}Y_{16}&=-2a_{15}Y_{12}+a_{65}Y_{15}+(a_{11}-a_{55})Y_{16}+a_{12}Y_{26}\\
\frac{d}{dr}Y_{25}&=2a_{26}Y_{12}+a_{21}Y_{15}-(a_{11}-a_{55})Y_{25}+a_{56}Y_{26}\\
\frac{d}{dr}Y_{26}&=-2a_{25}Y_{12}+a_{21}Y_{16}+a_{65}Y_{25}-(a_{11}+a_{55})Y_{26}
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

方程式(29)仍然成立，且在液体自由表面要消失的归一化特征函数定义为

$$\Delta_{SPH}(\omega, l)=Y_{16}(a)/Y_{26}(a) \tag{62}$$

6.3 通过固体-液体界面的连续

过固体-液体界面时，将一系列相关变量转换成另一个系列，这是不可避免的。首先，考虑一个液体层上覆盖着一个固体层的界面。向上积分，在界面的液体一侧，仅有两个基本解，但因为位移的水平分量在那里可有一个耦跃间断，所以有

$$
Y^S_{ijk} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 \\ y_{31} & y_{32} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_{51} & y_{52} & 0 \\ y_{61} & y_{62} & 0 \end{vmatrix}^L \tag{63}
$$

再一次说明，上标S代表交接面的固体一侧的量，L代表交接面液体一侧的量，方程表明，Y_{ijk}是右边矩阵的3阶子行列式。将右边展开，得到

$$
\left.\begin{array}{lll} Y^S_{123}=Y^L_{12}, & Y^S_{135}=-Y^L_{15}, & Y^S_{136}=-Y^L_{16} \\ Y^S_{235}=-Y^L_{25}, & Y^S_{236}=-Y^L_{26}, & Y^S_{356}=Y^L_{56} \end{array}\right\} \tag{64}
$$

其他的均为0。如果有界面液体一侧的组合矩阵Y^L_{ij}，则应能用此方程式求得在界面固体一侧的组合矩阵，且能进一步重新作通过固体层的积分。

另一方面，当作通过固体层的积分并寻找固体-液体界面时，必须使用不同的连续法。首先从在界面固体一侧的三个解中，用这样的一种方法，即使解的剪切应力为零，构成两个独立解：

$$
\hat{y}^S_{ij} = y^S_{ij} - \frac{y^S_{4j}}{y^S_{43}} y^S_{i3} \qquad (j=1,2)
$$

显然，如前所定义的两组解$\hat{y}^S_{ij}$($i=1$，2，5，6)可用作界面液体一侧上的初始值，因为它们在那里满足所有的必要的连续性条件。另一方面，在界面固体一侧的组合矩阵元素式(49)，可写成为

$$
Y^S_{ijk} = \begin{vmatrix} \hat{y}^S_{i1} & \hat{y}^S_{i2} & y^S_{i3} \\ \hat{y}^S_{j1} & \hat{y}^S_{j2} & y^S_{j3} \\ \hat{y}^S_{k1} & \hat{y}^S_{k2} & y^S_{k3} \end{vmatrix}
$$

将右边展开并省略公共因子y_{43}，有

$$
\left.\begin{array}{lll} Y^L_{12}=Y^S_{124}, & Y^L_{15}=-Y^S_{145}, & Y^L_{16}=-Y^S_{146} \\ Y^L_{25}=-Y^S_{245}, & Y^L_{26}=-Y^S_{246}, & Y^L_{56}=-Y^S_{124} \end{array}\right\} \tag{65}
$$

6.4　本征函数的计算

一旦向上积分组合矩阵而得到一个本征值时，可用式(56)计算相应的本征函数的表面值，当表面层是固体时，有

$$\frac{y_3}{y_1}=\frac{Y_{346}}{Y_{146}},\qquad \frac{y_5}{y_1}=\frac{-Y_{456}}{Y_{146}} \tag{66}$$

当表面层是液体时，用式(29)

$$\frac{y_5}{y_1}=\frac{Y_{56}}{Y_{16}} \tag{67}$$

以这些值开始，向下积分应力-运动矢量的原方程式(45)或式(48)，按步校正y_2，y_4和y_6，在液体中，借助式(57)或它的等效关系(式(29))。

通过固体层积分方程，并到达固体-液体交接面时，因为本征函数y_1，y_2，y_5和y_6通过界面必须连续，所以连续法很简单。另一方面，当通过液体层进行积分，并到达液体-固体交接面时，如外核-内核界面，必须在界面的固体一侧找到y_3，因为在液体一侧是得不到它的。在交接面的固体一侧$y_4=0$，由式(55)，有

$$y_3=-(Y_{125}y_1+Y_{134}y_5)/Y_{145} \tag{68}$$

因为在交接面上y_1，y_2，y_5和y_6连续及$y_4=0$，所以有交接面固体一侧的全部本征函数，它们用交接面液体一侧的本征函数表示。

6.5　能量积分关系

概括积分关系如下

$$\langle L\rangle=\omega^2I_1-I_2=-[y_1y_2+y_3y_4+y_5y_6]。 \tag{69}$$

这里

$$
\left.\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^a \rho(y_1^2+y_3^2)\,\mathrm{d}r \\
I_2 &= \int_0^a \Big\{ \frac{1}{C}y_2^2 + \frac{1}{L}y_4^2 + \frac{1}{r^2}\Big(A-\frac{F^2}{C}-N\Big) \\
&\quad \times \{2y_1-[l(l+1)]^{1/2}y_3\}^2 + \frac{(l-1)(l+2)N}{r^2}y_3^2 \\
&\quad - \frac{2\rho g}{r}y_1\{2y_1-[l(l+1)]^{1/2}y_3\} + 4\pi G y_6^2 \\
&\quad + \frac{2(l+1)\rho}{r}y_1y_5 - \frac{2[l(l+1)]^{1/2}\rho}{r}y_3y_5\Big\}\mathrm{d}r \\
U &= a^2 I_3 / c I_1 \\
I_3 &= \int_0^a \Big\{ \frac{1}{r^2}\Big(A-\frac{F^2}{C}\Big)y_3^2 + \frac{1}{r(1+\frac{1}{2})}y_5(y_6+\rho y_1) \\
&\quad + \frac{1}{r[l(l+1)]^{1/2}}\Big[y_1y_4 - \frac{F}{C}y_2y_3 \\
&\quad - \frac{2}{r}\Big(A-\frac{F^2}{C}-N\Big)y_1y_3 \\
&\quad + \frac{\rho}{r}y_3(gy_1-y_5)\Big]\Big\}\mathrm{d}r
\end{aligned}\right\} \tag{70}
$$

旋转分裂因子β用式(39)计算

6.6 组合矩阵的偏导数

式(54)和式(61)象式(41)一样，有相同的形式。因而在固体层的组合Y_{ijk}和液体层的组合Y_{ij}的偏导数，能以非重力球状振型相类似的方式进行积分，在固体层中，组合以及它的偏导数一起构成一个有$14\times3=42$个方程的一阶微分方程系统。初一看，这对于要得到稳定的数值解似乎太大，但实际上，系统是稳定的，且已有可能计算这些解，甚至对于${}_{20}S_{20}$振型，用单精度算术都可以。

当组合以及它的偏导数为得到一个本征值而积分到自由表面时，在自由表面是固体情况，能用下式计算相应的群速度

$$U=-\frac{\partial Y_{246}}{\partial l}\bigg/\left[\frac{\partial Y_{246}}{(\omega a)}\right]_a \tag{71}$$

而当表面是液体时，有

$$U=-\frac{\partial Y_{26}}{\partial l}\bigg/\left[\frac{\partial Y_{26}}{\partial(\omega a)}\right]_a \tag{72}$$

平均动能也能从偏导数中计算出。对式(70)微商，并用约束 $y_4(a)=y_6(a)=0$ 及让 $y_2(a)=0$，得到，当表面为固体时，为

$$2\omega^2 I_1=-\left[\frac{y_1^2}{Y_{146}}\omega\frac{\partial Y_{246}}{\partial\omega}\right]_a \tag{73}$$

或者，当表面为液体时为

$$2\omega^2 I_1=-\left[\frac{y_1^2}{Y_{16}}\omega\frac{\partial Y_{26}}{\partial\omega}\right]_a \tag{74}$$

6.7 球状振荡程序的说明

重力球状振荡程序包的关键字是SPH。SPHDSP指的是一个驱动程序，它控制SPHRKG,SPHEFR计算本征函数和偏导数，及SPHINI，SPHDEL和SPHENG是由SPHRKG和 SPHEFR调用的程序。

除去重力外，输入和输出类似于扭转振型和非重力球状振型的输入和输出。对于DISPER80用户来说，有必要给定一重力模型，这个模型与密度模型一致。为了适应这点，DSPGRV 程序准备用来计算给定密度结构时的重力。重力常数 G 在全部程序中是一个变量，但当它以小于零进入程序中时，它们假设一个补缺值为 $G=6.673\times10^{-8}$，这是大地测量参考系统的1983年值。

7. Love波和Rayleigh波

因为Love波和Rayleigh波的算法已在Takeuchi和Saito(1972)中予以详细说明，仅将程序中的变数定义给出如下。

7.1 Love 波

Love波型运动的运动-应力矢量分量定义为：

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{k} y_1(z) \nabla \times [\hat{z} Y_k(x,y)], \\ \sigma_z &= \frac{1}{k} y_2(z) \nabla \times [\hat{z} Y_k(x,y)], \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

这里 $\hat{z}$ 是垂直向的单位矢量，k是水平波数，$Y_k(x,y)$是波数k的平面谐和函数或为二维 Helmholtz 方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)Y_k(x,y)=0$$

的解。在直角坐标系统中，$Y_k(x,y)$给定为

$$Y_k(x,y)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(lx+my)}$$

这里$k^2=l^2+m^2$，在平面极坐标中给定为

$$Y_k(x,y)=J_m(kr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$$

这里$J_m(kr)$是第一类 Bessel 函数，将上述形式代人运动方程，得到熟知的方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} y_1 &= \frac{1}{L} y_2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} y_2 &= k^2(N-\rho c^2) y_1 \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

这里$c=\sigma/k$是相速度。在Love波程序中，用ω和 c 作为独立参数代替ω和k。因而例如，LOVRKG求出给定角频率ω情况下的相速度，与参数选择相一致，形成本征函数对ω和c的偏导数。用这些偏导数写出的群速度公式为

$$U=c\left(c\frac{\partial y_2}{\partial c}\right)\left(c\frac{\partial y_2}{\partial c}+\omega\frac{\partial y_2}{\partial \omega}\right)^{-1} \tag{77}$$

能量积分 I_3 也用偏导数写出

$$2k^2 I_3 = 2k^2\int_{-\infty}^{0} N y_1^2\,\mathrm{d}z = -\left[y_1^2 c\frac{\partial y_2}{\partial c}\right]_0 \tag{78}$$

注意，在球形模型中，程序输出是动能积分 I_1，而在平模型中输

出是I_3。

在DISPER80中，如下两套Love波程序都是有效的：即Runge-Kutta-Gill法程序和矩阵法程序。在Runge-Kutta-Gill法程序中，LOVRKG求出一个本征相速度，LOVEFR计算本征函数，式(75)是象在扭转程序中一样，用Runge-Kutta-Gill积分算子求积。另一方面，LOVMRX和LOVEFX分别是LOVRKG和LOVEFR的矩阵法程序。它们用Thomson-Haskell型矩阵方法积分运动方程。

7.2 Rayleigh 波

Rayleigh波运动-应力矢量定义为

$$\left.\begin{aligned} u &= y_1(z)[\hat{z}Y_k(x,y)] + \frac{1}{k}y_3(z)\nabla[Y_k(x,y)] \\ \sigma_z &= y_2(z)[\hat{z}Y_k(x,y)] + \frac{1}{k}y_4(z)\nabla(Y_k[(x,y)] \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

运动方程给出为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz}y_1 &= \frac{1}{C}(y_2+kFy_3) \\ \frac{d}{dz}y_2 &= -\rho\omega^2 y_1 + ky_4 \\ \frac{d}{dz}y_3 &= -ky_1 + \frac{1}{L}y_4 \\ \frac{d}{dz}y_4 &= -\frac{kF}{C}y_2 + \left[k^2\left(A-\frac{F^2}{C}\right)-\rho\omega^2\right]y_3 \end{aligned}\right\} \quad (80)$$

再一次将ω和c取为独立参数，且群速度和能量积分之一用各个y的偏导数写出：

$$U = c\left(c\frac{\partial Y_{24}}{\partial c}\right)\left[c\frac{\partial Y_{24}}{\partial c}+\omega\frac{\partial Y_{24}}{\partial\omega}\right]^{-1} \quad (81)$$

$$2k^2I_3 = -y_1^2\frac{1}{Y_{14}}c\frac{\partial Y_{24}}{\partial c} \quad (82)$$

这里Y_{ij}是组合矩阵的(i,j)元素。

RAYRKG和RAYEFR分别是计算相速度和本征函数的子程序，它们用的是 Runge-Kutta-Gill 积分法。而矩阵法程序，RAYMRX和RAYEFX能计算各向同性成层模型中的 Rayleigh 值，但矩阵法不能用于横向各向同性模型。

第二章　地球和太阳自由振荡的本征频率和本征函数的计算

J. H. Woodhouse

（哈佛大学地球和行星科学系）

1. 引　言

由简正振型（Gilbert，1971）叠加的完全的长周期地震图的合成，形成许多地震学研究的基础。它超过其他合成方法的主要优点是，这种方法是完全自动的，且没有略掉理论能预期的地震信号的任何部分。然而，为了用此方法，必须有以前计算过的简正振型的本征频率和本征函数的完全的目录，高到某一预先赋值的频率极限内。本章提出计算这种目录的一个算法。这个算法在不少单位已用了若干年（一个称为 MINEOS 的修改形式由G. Master编写），但除主要考虑自重被略去外（Woodhouse，1981），这种方法，在已出版材料中还没有被叙述过。附于本书的程序OBANI也可以计算太阳绝热振型的本征频率和本征函数。

自七十年代早期起，F. Gilbert编写的程序 EOS已非正式的流传开来。这个程序用变阶-变步的Runge-Kutta方法求解给定自由振荡的常微分方程。这种方法的某些方面已在Gilbert和Backus（1969）的报告中叙述。这里叙述的算法是EOS的后代系统，其中采用了相同的有限差分法，且许多 Fortran 编码直接拷贝 EOS程序或进行了一些修改。但是，EOS程序是不适用于计算完全的振型目录的，这主要有两个缺点。

第一，在普通的高频段，方程是“刚性”的，对某些振型，导致很不稳定的结果。在这种情况下，一组线性无关的解的直接积分，起到将每一个解有效地投影到最速增加解的空间中去的作用，这样，虽然这些解理论上是线性无关的，但数值上变成与一组相关解不可分辨。最近修正过的EOS程序用重新正交化方法克服了这种困难；这里提出的算法——一种由 Gilbert 和 Backus (1966, 1969)讨论过用求解方程组的子行列式的方法——来防止这个问题。本文新颖的结果是表明如何直接可从这些子行列式组构成本征函数。这推广了Woodhouse(1980)的4阶系统的结果。

由前面有限差分算法所遇到的第二个问题是：要保证在给定区间内找到全部本征值有困难。对于径向振型和扭转振型，这些本征频率均匀地且可预期地分布着，这样使得确定特征方程的全部根并不困难。另一方面，球状振型谱包含有许多紧密和不规则分布的本征值，且详尽地寻找本征根要求非常小的频率步长，以致使方法变成不可行了。再之，也不可能预先给定应当用什么样的频率步长。对于二阶Sturm-Liouville 系统，这是熟知的，即本征值数目可以用解和它的导数的某种组合的零交点数来确定。因此，有可能计算有多少个本征值处于本征参数两个试验值之间，这两个试验值能使全部根将都有效地分类。一旦全部本征值的这种上限与下限都已知道，则可较简单地集中在单独的本征值上。这里提出的算法对于某一类高阶微分系统，用一系列解的子行列式的零交点确定这样的一个数目，因而这方法也能有效地对球状振型的本征频率分类。将称这类方法为“计数算法”。

一种应用Rayleigh-Ritz技术的不同方法已由Buland和 Gilbert 完成(Buland, 1976; Buland 和 Gilbert, 1984，也可见本书中 Buland 的一章（第四篇第三章))。在这一算法中，简正振型方程的变分公式用来将问题简化为寻求一个带状实对称矩阵的本征值和本征矢量，这些可使有效的数值方法存在。该技术主要的优点之一是：有已知的分类矩阵本征值方法(Martin 和 Wilkinson,

1967; Peters和Wilkinson, 1969)。这里讨论的算法有许多超过Rayleigh-Ritz技术的优点，特别是当想要完成中高频率(比如说20mHz以上)的计算，因为在变分法中，必须选择离散化间隔来获得要研究的最高频振型的适当的取样。另一个困难是：低频但大的振荡振型，这对应于地核内部波，会混淆进地震频率带中，且必须明确地从最后目录中除去。

给定地球的弹性-重力振荡的常微分方程系统，在地球的固体部分，它是6阶的，而在液体区域中(外核和海洋)是4阶的；地球中心是一个奇异点。这些构成复杂内容，为表达简单起见，初始时省略掉。考虑系统

$$\frac{dy}{dx}=A(x, \lambda)y \quad (x\in[x_1, x_2]) \tag{1.1}$$

这里A是给定的、按段连续的$n\times n$的x矩阵函数，它也与参数λ有关。假定，对于每一固定的$x\in[x_1, x_2]$及λ的某一研究区间，如$[\lambda_1, \lambda_2]$，A的元素是λ的连续可微函数。解$y(x)$将是连续的和在x_1，x_2处满足给定的齐次边界条件。一般说来，A和y的元素可以是复的。本征值问题包括：为了非零解的存在而求出λ并确定这些解。一般的齐次边界条件可分别用维数n_1和n_2的矢量空间$\bar{V}^{(1)}\subseteq\mathbb{C}^n$，$\bar{V}^{(2)}\subseteq\mathbb{C}^n$来说明，且要求

$$y(x_1)\in\bar{V}^{(1)}, \qquad y(x_2)\in\bar{V}^{(2)} \tag{1.2}$$

符号$\mathbb{C}^n$代表复数所有顺序的n维的矢量空间。在计数算法的推导中，假设$\bar{V}^{(1)}$和$\bar{V}^{(2)}$是独立于λ的。

直接的解法如下，首先选择$\bar{V}^{(1)}$的基$\{\bar{\sigma}_1^{(1)}, \bar{\sigma}_2^{(1)}\cdots\bar{\sigma}_{n_1}^{(1)}\}$和$\bar{V}^{(2)}$的基$\{\bar{\sigma}_1^{(2)}, \bar{\sigma}_2^{(2)}\cdots\bar{\sigma}_{n_2}^{(2)}\}$，并定义$\sigma_k^{(\alpha)}(x, \lambda)$，$(\alpha=1, 2; k=1, 2\cdots n_\alpha)$是初始问题的解

$$\frac{d\sigma_k^{(\alpha)}}{dx}=A(x, \lambda)\sigma_k^{(\alpha)}, \quad \sigma_k^{(\alpha)}(x_\alpha)=\bar{\sigma}_k^{(\alpha)} \tag{1.3}$$

众所周知，如果一组解在一点上是线性独立的，则它们到处都是线性独立的，因而，在每一个固定点x，$\{\sigma_1^{(\alpha)}\cdots\sigma_{n_\alpha}^{(\alpha)}\}$是$n_\alpha$维子空

间$V^{(\alpha)}(x, \lambda)$的一个基。从而，或者是$V^{(1)}(x, \lambda)$和$V^{(2)}(x, \lambda)$具有一个非零的对所有x的共同子空间，这种情况中，λ是一个本征值，且对于每一个x的本征函数都位于$V^{(1)}(x, \lambda)\cap V^{(2)}(x, \lambda)$上；或者是它们不具有如此子空间，在这种情况中，$\lambda$不是本征值，且仅有零解存在。很容易看到，若$n_1+n_2>n$，则非零解总是存在。在实践中遇到的最一般的情况是$n_1+n_2=n$，因而独立边界条件数等于系统的积分常数的数目。这样的系统通常至多具有离散本征值。空间$U=V^{(1)}(x, \lambda)\cap V^{(2)}(x, \lambda)$的维数独立于$x$且是退化的阶数，非退化的本征值有$\mathrm{dim}(U)=1$。

今后，假设$n_1+n_2=n$，对于λ将为一个本征值的条件是$n\times n$阶矩阵的行列式

$$S\equiv[\sigma_1^{(1)}\ \sigma_2^{(1)}\cdots\sigma_{n_1}^{(1)}\ \sigma_1^{(2)}\ \sigma_2^{(2)}\cdots\sigma_{n_2}^{(2)}] \tag{1.4}$$

对某一x(因而也是对所有x)为零。一般这个矩阵的秩缺与x无关，且等于退化度。退化本征函数的可能性使理论更加复杂，且在简正振型问题中还未被考虑。因此，虽然退化本征值的情况不无兴趣，但在本文中将假设在研究区间$[\lambda_1, \lambda_2]$内的全部本征值是非退化的。

对应于上列的本征值问题，可以定义伴随问题

$$\frac{dy}{dx}=-A^{+}y \tag{1.5}$$

$$y(x_1)\in\bar{V}^{(1)\perp}, \qquad y(x_2)\in\bar{V}^{(2)\perp} \tag{1.6}$$

这里$^+$代表Hermit共轭量，$\bar{V}^{(\alpha)\perp}$是$n-n_\alpha$维矢量空间；它在通常的内积下

$$(x, y)\equiv x^{+}y, \qquad x, y\in\mathbb{C}^{n}$$

与$\bar{V}^{(\alpha)}$正交。很容易证明，如果$y(x)$是式(1.5)的任意解，且在某点x上与子空间$V^{(1)}(x, \lambda)$正交，则$y(x)$对于所有x点上都正交于$V^{(1)}(x, \lambda)$，用式(1.3)和(1.5)，有

$$\frac{d}{dx}(\sigma_k^{(1)}(x)^{+}y(x))=\sigma_k^{(1)}(x)^{+}A^{+}y(x)$$

$$-\sigma_k^{(1)}(x)^+ \mathsf{A}^+ y(x)=0 \qquad (1.7)$$

由此得所叙述的结果，因而，如果定义$V^{(\alpha)\perp}(x, \lambda)$是对于每一个$x$正交于$V^{(\alpha)}(x, \lambda)$的子空间，对于$\lambda$为伴随系统的本征值的必要且充分的条件是：对某一个$x$(因而对所有的$x$)，$V^{(1)\perp}(x, \lambda)$和$V^{(2)\perp}(x, \lambda)$具有一个非零公共子空间。对于每一个$x$，伴随本征函数位于$\tilde{U}(x, \lambda)\equiv V^{(1)\perp}(x, \lambda)\cap V^{(2)\perp}(x, \lambda)$上。$\tilde{U}(x, \lambda)$的维数等于方程

$$\mathsf{S}^+ x=0$$

的解所跨空间的维数(式1.4)，即S的秩缺。因而伴随系统的本征值λ^*与原来方程本征值等同，且它们的退化度也是一样。

给定地球自由振荡的方程可用变分原理推得。这将在这里给定的意义上的自伴性质强加在这些方程上(Chapman和Woodhouse, 1981)。考虑一般的二次Lagrange算子

$$L(q, \dot{q}, x)=\mathrm{Re}\{q^+\mathsf{C}q+2\dot{q}^+\mathsf{D}q+\dot{q}^+\mathsf{E}\dot{q}\} \qquad (1.8)$$

这里q是一有m个"坐标"的矢量，式中字母头上的点表示对x的微商。$m\times m$阶矩阵C，D和E可以与x有关，不失一般，C和E是Hermit矩阵。变分问题

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} L(q, \dot{q}, x)\mathrm{d}x=0 \qquad (1.9)$$

导出Euler-Lagrange方程

$$(\mathsf{D}q+\mathsf{E}\dot{q})^{\cdot}=\mathsf{C}q+\mathsf{D}^+\dot{q} \qquad (1.10)$$

因而，定义共轭动量$p=\mathsf{D}q+\mathsf{E}\dot{q}$和假设E是可逆的，可写Hamilton方程

$$\dot{q}=-\mathsf{E}^{-1}\mathsf{D}q+\mathsf{E}^{-1}p, \quad \dot{p}=(\mathsf{C}-\mathsf{D}^+\mathsf{E}^{-1}\mathsf{D})q+\mathsf{D}^+\mathsf{E}^{-1}p \qquad (1.11)$$

如果现在定义$2m$个元素的矢量y

$$y=\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

及$2m\times 2m$个分块矩阵

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix} -\mathsf{E}^{-1}\mathsf{D} & \mathsf{E}^{-1} \\ \mathsf{C}-\mathsf{D}^+\mathsf{E}^{-1}\mathsf{D} & \mathsf{D}^+\mathsf{E}^{-1} \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

可用式(1.1)形式写出式(1.11)。然而，注意，有某些对称性，即它的非对角子矩阵是Hermit矩阵，且它的对角子矩阵及符号改变与Hermit共轭性有关。引入$2m\times 2m$斜Hermit矩阵

$$\Sigma=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

得到ΣA是Hermit的，即

$$\Sigma A+A^{+}\Sigma=0\text{或}A^{+}=\Sigma A\Sigma \tag{1.15}$$

也注意$\Sigma^2=-1$。在矩阵代数语言中，在Σ变换下$-A^{+}$与A类似。在式(1.5)用此变换，发现如果y是系统式(1.1)的任意解，则Σy是伴随系统式(1.5)的一个解。只要用Σ变换使边界条件正确地被映射，则原来本征值问题和它的伴随之间的相当性变成完全的。要求：如果$\{\bar{\sigma}_k^{(\alpha)}\}$是$\bar{V}^{(\alpha)}$的一个基，则$\{\Sigma\bar{\sigma}_k^{(\alpha)}\}$是$\bar{V}^{(\alpha)\perp}$的基。因为$\bar{V}^{(\alpha)\perp}$的维数是$n-n_\alpha$($\alpha=1$ 或 2)，要求$n_\alpha=n-n_\alpha$，即$n_1=n_2=\frac{1}{2}n$也要求

$$\bar{\sigma}_i^{(\alpha)+}\Sigma\bar{\sigma}_j^{(\alpha)}=0\text{对于全部}i,\ j\leqslant n_\alpha,\ \alpha=1,2 \tag{1.16}$$

可以证明，如果式(1.15)和(1.16)成立，则由式(1.3)定义的矢量$\sigma_k^{(\alpha)}(x,\ \lambda)$满足

$$\sigma_i^{(\alpha)+}\Sigma\sigma_j^{(\alpha)}=0\ \text{对于全部}x\in[x_1,x_2],\ i,j\leqslant n_\alpha,\ \alpha=1,2 \tag{1.17}$$

如果矩阵A和边界条件有这些特性，则系统被称为自伴随的。很容易证明，对于这样一个问题，如果y是原来问题的一个本征函数，则Σy是伴随问题的一个本征函数。

2. 子行列式代数

上面概括的本征值问题的求解方法，对于“刚性”微分系统变成为数值上不稳定，这因为当在x_α($\alpha=1$或2)上，$\{\bar{\sigma}_k^{(\alpha)}\}$被选为线性无关时，则$\{\bar{\sigma}_k^{(\alpha)}(x,\ \lambda)\}$变成为数值上与$x$的其他所有值相关。因而，变成来寻找一个独立于任何基的矢量子空间的特征化

问题；这样一个特征化由这些基矢量的"子行列式"或组合(Gantmacher，1959；Gilbert 和 Backus，1966)来提供。这里指出，如果$n\times m$阶矩阵S的列是m维子空间$V\subseteq\mathbb{C}^n$的基，则这组S的全部$m\times m$子行列式认为象一个$\binom{n}{m}$元素的矢量，单一地特征化V，且对一个乘子内，与基的选择无关。因而，可以称为"V的子行列式矢量"。然后，如下的这些问题自然地会产生。当给出V的子行列式矢量时，$V^{\perp}$的子行列式矢量是什么；给出两个子空间$V^{(1)}$和$V^{(2)}$的子行列式时，$V^{(1)}\cap V^{(2)}$的维数是什么及它的子行列式矢量又是什么？子空间的投影算子如何用子行列式矢量来表示？这里引入矢量子空间的演算。

考虑一个$p\times q$阶矩阵X。对于满足下式的任意整数s

$$1\leqslant s\leqslant p,\qquad s\leqslant q \tag{2.1}$$

可以定义一个用[X:s]代表的矩阵来构成X的全部$s\times s$子行列式。每个子行列式可以用s行数$(i_1, i_2, \cdots, i_s)$和s列数$(j_1, j_2, \cdots, j_s)$标记，它们定义一个特定的子行列式，其中$(i_1, \cdots, i_s)$是整数1，2，$\cdots$，p的组合，$(j_1, j_2, \cdots, j_s)$是数1，$\cdots$，q的组合，没有重复。如果这些组合按一定的次序排列，则它们可以用来标记矩阵[X:s]的行与列，这矩阵是$\binom{p}{s}\times\binom{q}{s}$维。注意，相当于不同次序控制变量的元素不认为是不同的，给定规定的次序

$$1\leqslant i_1<i_2<i_3\cdots<i_s\leqslant p,\quad 1\leqslant j_1<j_2<j_3\cdots<j_s\leqslant q \tag{2.2}$$

称[X:s]为X的第s个子行列式矩阵；具有单列的子行列式矩阵被称为子行列式矢量。

与子行列式有关的基本结果，在取子行列式运算条件下，维持矩阵乘积运算。即对于任意矩阵X和Y，它们的矩阵乘积和s阶子行列式给定时，有

$$[\mathrm{X}:s][\mathrm{Y}:s]=[\mathrm{XY}:s] \tag{2.3}$$

当然，假设所采用的行数和列数的组合次序到处是一致的。

用符号I表示任意单位矩阵，依靠内容表明它的维数。很容易验证，有

$$[1:s]=1 \tag{2.4}$$

如果X是正方可逆矩阵，则立即从式(2.3)和(2.4)得

$$[X:s][X^{-1}:s]=1 \tag{2.5}$$

和由此得

$$[X:s]^{-1}=[X^{-1}:s] \tag{2.6}$$

现在，建立下述结论。

结论2.1 令X和Y是两个$n\times p(n\geqslant p)$阶矩阵，每一个满秩为p。则当且仅当存在一个非零复数α，使得

$$[X:p]=\alpha[Y:p] \tag{2.7}$$

才有X和Y的各列张成相同的矢量空间。

证明 先假设X和Y的各列张成相同的空间。随后X的各列可由Y的各列的线性组合来表示。且因为两者都为满秩，则对某一非奇异$p\times p$矩阵Q，有

$$X=YQ \tag{2.8}$$

取子行列式，得到象式(2.7)的关系

$$[X:p]=[Y:p]\det Q,\ \det Q\neq 0 \tag{2.9}$$

现假设式(2.7)成立。希望证明X和Y的各列必须张成相同的子空间。要达到这目的，将由Y各列定义的基扩展为整个n维空间的基。如果附加的基矢量是$n\times(n-p)$阶矩阵Z的列，则可构制非奇异分块矩阵

$$W=[Y\ \ Z] \tag{2.10}$$

和因此有

$$Y=W\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

另外，X的列可用W的列来表达，

$$X=WK \tag{2.12}$$

其中K是$n\times p$阶及秩为p的矩阵。用式(2.3)，(2.7)和(2.11)，有

$$[X:p]=[W:p][K:p]=\alpha[Y:p]=\alpha[W:p]m \tag{2.13}$$

这里m是

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

的子行列式矢量。很清楚，m 仅有一个非零元素，即它相应于行$(1, 2, \cdots, p)$的组合。因为，从构造上说，W 和 $[W:p]$是非奇异的，所以式(2.13)给出

$$[K:p]=\alpha m \tag{2.15}$$

由此得出K的前面p行构成一个非奇异的$p\times p$矩阵，比如说Q，且其他行都为零，即

$$K=\begin{bmatrix} Q \\ 0 \end{bmatrix} \quad \det Q\neq 0 \tag{2.16}$$

因而，从式(2.12)和(2.10)，有

$$X=YQ, \qquad Y=XQ^{-1} \tag{2.17}$$

即X的每一列可以表达成Y的一些列的线性组合。反之亦然。这就完成了结论2.1的证明。

这结论表明，列矢量$[X:p]$的"方向"唯一地作了定义，且由X的一些列所张成的$\mathbb{C}^n$的p维子空间唯一地确定。因而，子行列式矢量提供了一个与所选择基无关的方法来特征化子空间。因面，如果V是$\mathbb{C}^n$的p维子空间，则可以有意义地称为"V的子空间矢量"，它可确定到一个乘数标量。

对于任意子空间V，现在引进正交子空间$\tilde{V}$作为矢量子空间，它包括全部$x\in V$：$y^+x=0$ 的所有矢量y，其中 $^+$ 代表 Hermit 共轭量。众所周知，一组V的基矢量和一组$\tilde{V}$的基矢量一起张成$\mathbb{C}^n$，同时，如果V是p维的，则$\tilde{V}$是$n-p$维的。因由结论2.1知，V和$\tilde{V}$的每一个都可由它们的子行列式矢量确定，所以，这些子行列式矢量之间必须有一个函数关系。现在下面证明这点。

结论2.2 令V是$\mathbb{C}^n$的p维子空间，且$\tilde{V}$是与V正交的子空间。如果m是V的子行列式及$\tilde{m}$是$\tilde{V}$的子行列式矢量，则对于非零的α，有

$$\tilde{m}=\alpha E^{(n,p)}m^* \tag{2.18}$$

这里 * 代表复共轭，$E^{(n,p)}$是$\binom{n}{p}$阶的正方矩阵，它的元素给为

$$E^{(n,p)}_{(i_1\cdots i_{1-p})(i_{n-p+1}\cdots i_n)} = e_{i_1\cdots i_n} \qquad (2.19)$$

符号 e 定义为：当它的下标为整数1，2，…，n的偶置换时为1，而当为奇置换时为－1，其他情况为零。注意，式(2.19)左边项括号指标的第一组和第二组是分别表示矩阵$E^{(n,p)}$的行和列。假定这些行和列用指标的组合来标记的，即象是 $\tilde{m}$和m 元素的同样方法进行标记。结论2.2断定，$\tilde{V}$的子行列式矢量可从V的子行列式矢量得到，即只要适当地改变符号且简单地取复共轭及重新排列它的元素。

证明 为证明此结论，取$n\times p$矩阵$X^{(1)}$，它的列是V的一个基，且扩展此基成为整个空间的一个基。如果附加的基矢量是$n\times q$矩阵$X^{(2)}$的列($q=n-p$)，则分块矩阵

$$X=[X^{(1)}\ \ X^{(2)}] \qquad (2.20)$$

的列形成一个完全的 n 维空间的基，且X 是可逆的。令$Y^{(1)}$和$Y^{(2)}$是X^{-1}的子分块，它们的阶数分别为$p\times n$及$q\times n$，即

$$X^{-1}=\begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

因而

$$X^{-1}=X=1=\begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix}[X^{(1)}\ \ X^{(2)}] \qquad (2.22)$$

得到恒等式

$$Y^{(1)}X^{(1)}=1 \qquad (2.23a)$$

$$Y^{(2)}X^{(2)}=1 \qquad (2.23b)$$

$$Y^{(1)}X^{(2)}=0 \qquad (2.23c)$$

$$Y^{(2)}X^{(1)}=0 \qquad (2.23d)$$

类似地有

$$XX^{-1}=1=X^{(1)}Y^{(1)}+X^{(2)}Y^{(2)} \qquad (2.24)$$

方程式(2.23d)表示$Y^{(2)+}$的列包含在正交空间 $\tilde{V}$中，及式(2.23b)

表明$Y^{(2)}$为满秩q。因而$Y^{(2)+}$的各列是$\tilde{V}$的一个基，且 $\tilde{V}$ 的子行列式矢量给出为

$$\tilde{m}=[Y^{(2)+}:q] \tag{2.25}$$

因而，充分地表明，对某一α，有

$$[Y^{(2)+}:q]=\alpha E^{(n,p)}[X^{(1)}:q]^* \tag{2.26}$$

为证明这点，使用恒等式

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} X_{i_1 k_1} X_{i_2 k_2} \cdots X_{i_n k_n} = \epsilon_{k_1 k_2 \cdots k_n} \det X \tag{2.27}$$

其中假定重复指标为求和。写

$$U=X^{-1T} \tag{2.28}$$

其中T代表矩阵转置，即象式(2.28)，有

$$U=[Y^{(1)T}\ \ Y^{(2)T}] \tag{2.29}$$

用

$$U_{j_1 k_{p+1}} U_{j_2 k_{p+2}} \cdots U_{j_q k_n}$$

两边乘式(2.27)，并假定$k_i=i(i=1,\ 2,\ \cdots p)$，得到

$$\begin{aligned} &\epsilon_{i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q} X^1_{i_1} X^2_{i_2} \cdots X^p_{i_p} \\ &= \det W \epsilon_{12 \cdots p k_{p+1} \cdots k_n} U_{j_1 k_{p+1}} U_{j_2 k_{p+2}} \cdots U_{j_q k_n} \\ &= \det W U^{p+1}_{[j_1} U^{p+2}_{j_2} \cdots U^n_{j_q]} \end{aligned} \tag{2.30}$$

在最后一行中，引进在下标中的方括号用以表示指标$j_1 j_2 \cdots j_q$，是完全反对称的，即式(2.30)代表对指标$j_1 \cdots j_q$的所有置换求和，偶置换时为正号，奇置换时为负号。上标简单地为列指标，放在上标位置或下标位置都无关重要。使用上式左边类似的记号，有

$$\epsilon_{(i_1 \cdots i_p) j_1 \cdots j_q} W^1_{[i_1} W^2_{i_2} \cdots W^p_{i_p]} = \det W U^{p+1}_{[j_1} U^{p+2}_{j_2} \cdots U^n_{j_q]} \tag{2.31}$$

括号( )中的指标是对全部组合求和而不是对所有置换。反对称的量简单地是$X^{(1)}$和$Y^{(2)T}$的子行列式矢量的元素，且得到

$$\pm E^{(n,p)}[X^{(1)}:p]=\det W[Y^{(2)T}:q] \tag{2.32}$$

这里，当p和q两者都是奇数时则取下边的负号。当取复共轭时，

这就是要求的式(2.26)，这样，建立了结论2.2。

下面，将求矩阵 $E^{(n,p)}$的如下特性，这可从它们的定义中直接得到：

$$E^{(n,p)T}E^{(n,p)}=1 \tag{2.33}$$

提出的下一个问题是，用子行列式矢量表示投影算子。假设$V^{(1)}$和$V^{(2)}$是两个不相连的子空间而共同张成$\mathbb{C}^n$，因而任意矢量x能单一地表达为

$$x=v^{(1)}+v^{(2)} \tag{2.34}$$

其中$v^{(1)}\in V^{(1)}$和$v^{(2)}\in V^{(2)}$。相应地有投影算子$P^{(1)}$和$P^{(2)}$，使得

$$v^{(1)}=P^{(1)}x,\quad v^{(2)}=P^{(2)}x \tag{2.35}$$

这些算子很清楚地与子空间所选择的基无关，这样应当有可能纯粹地用子空间的子行列式矢量来表达。

假设m是完全的n维空间中的p维子空间的子行列式矢量。会想到m是$\binom{n}{p}$维的，并用组合$(i_1\cdots i_p)$标记每一个元素，满足关系

$$1\leqslant i_1<i_2\cdots<i_p\leqslant n$$

因而m的单个元素可用$m_{(i_1i_2\cdots i_p)}$代表。由m的元素，现在按照下式构成一个$n\times\binom{n}{p-1}$阶的矩阵M

$$M_{i_1(i_2\cdots i_p)}=\begin{cases}0 & \text{如果}i_1=i_k\text{对于}2\leqslant k\leqslant p\\ \pm m_{(j_1j_2\cdots j_p)} & \text{这里}(j_1\cdots j_p)\text{是偶数，标}(+)\text{或是奇数，标}(-)\text{，按增加序号安排}(i_1\cdots i_p)\text{的置换}\end{cases} \tag{2.36}$$

用$i_1(1\leqslant i_1\leqslant n)$标记M各行且满足

$$1\leqslant i_2<i_3<i_4\cdots<i_p\leqslant n$$

的组合$(i_2,\ i_3\cdots i_p)$标记的行，并按某一确定次序排列。称M为子行列式矢量M的“生成矩阵”，并写成

$$M=sp(m) \tag{2.37}$$

现在证明下面结论。

结论2.3　令$V^{(1)}$和$V^{(2)}$是$\mathbb{C}^n$的两个维数为p和q的不相交的子空间，它们一起张成完全的n维空间$(n=p+q)$，并令$m^{(1)}$和$m^{(2)}$是

$V^{(1)}$和$V^{(2)}$的子行列式矢量。进一步，令$\tilde{m}^{(1)}$和$\tilde{m}^{(2)}$是正交子空间$\tilde{V}^{(1)}$和$\tilde{V}^{(2)}$的子行列式矢量，它们被给定为

$$\tilde{m}^{(1)}=\mathsf{E}^{(n,\,p)}m^{(1)*},\qquad \tilde{m}^{(2)}=\mathsf{E}^{(n,\,q)}m^{(2)*}\tag{2.38}$$

则对于全部的矢量x，满足如下关系的投影算子$\mathsf{P}^{(1)}$和$\mathsf{P}^{(2)}$

$$\mathsf{P}^{(1)}x\in V^{(1)},\quad \mathsf{P}^{(2)}x\in V^{(2)},\quad \mathsf{P}^{(1)}+\mathsf{P}^{(2)}=1\tag{2.39}$$

给定为

$$\mathsf{P}^{(1)}=\frac{1}{\Delta}\mathsf{M}^{(1)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(2)+},\quad \mathsf{P}^{(2)}=\pm\frac{1}{\Delta}\mathsf{M}^{(2)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(1)+}\tag{2.40}$$

这里当p和q两者都为奇数时，仅用下面的负号，及

$$\left.\begin{aligned}\mathsf{M}^{(1)}&=\mathrm{sp}(m^{(1)}),\qquad \mathsf{M}^{(2)}=\mathrm{sp}(m^{(2)})\\ \widetilde{\mathsf{M}}^{(1)}&=\mathrm{sp}(\tilde{m}^{(1)}),\qquad \widetilde{\mathsf{M}}^{(2)}=\mathrm{sp}(\tilde{m}^{(2)})\end{aligned}\right\}\tag{2.41}$$

和

$$\Delta=\tilde{m}^{(2)+}m^{(1)}=\pm\tilde{m}^{(1)+}m^{(2)}\tag{2.42}$$

证明　为建立此结论，用证明结论2.2的同样的方法着手。引进两个阶数分别为$n\times p$和$n\times q$的矩阵$\mathsf{X}^{(1)}$和$\mathsf{X}^{(2)}$，它们的各列张成$V^{(1)}$和$V^{(2)}$子空间如式(2.20)—(2.24)一样，构成矩阵X和X^{-1}。应用那里所引进的记号很容易证明，投影算子$\mathsf{P}^{(1)}$和$\mathsf{P}^{(2)}$给定为

$$\begin{aligned}\mathsf{P}^{(1)}&=[\mathsf{X}^{(1)}\ \ 0]\mathsf{X}^{-1}=\mathsf{X}^{(1)}\mathsf{Y}^{(1)},\\ \mathsf{P}^{(2)}&=[0\ \ \mathsf{X}^{(2)}]\mathsf{X}^{-1}=\mathsf{X}^{(2)}\mathsf{Y}^{(2)}\end{aligned}\tag{2.43}$$

用余因子对逆矩阵给予通常的表达，并明确地写出式(2.43)中矩阵乘积的求和，得到

$$\begin{aligned}P^{(1)}_{ij}=\frac{1}{\Delta}\ e_{j i_2\cdots i_p i_{p+1}\cdots i_n}\{&X^1_i X^2_{i_2}\cdots X^p_{i_p}X^{p+1}_{i_{p+1}}\cdots X^n_{i_n}\\ &+X^1_{i_2}X^2_i X^3_{i_3}\cdots X^p_{i_p}X^{p+1}_{i_{p+1}}\cdots X^n_{i_n}\\ &+\cdots+X^1_{i_2}X^2_{i_3}\cdots X^{p-1}_{i_p}X^p_i X^{p+1}_{i_{p-1}}\cdots X^n_{i_n}\}\end{aligned}\tag{2.44}$$

这里$\Delta=\det\mathsf{X}$和上标是列指标。这也可写成

$$P^{(1)}_{ij}=\frac{1}{\Delta}\ e_{j(i_2\cdots i_p)(i_{p+1}\cdots i_n)}X^1_{(i}X^2_{i_2}\cdots$$

$$X^{p}_{i_p]}X^{p+1}_{[i_{p+1}}\cdots X^{p}_{i_n]} \tag{2.45}$$

这里，象上面的一样，使用了方括号[ ]表示所包括的指标完全是反对称的，而括号( )表示仅对指标的所有组合求和而不是对所有的置换。由生成矩阵的定义式(2.36)，(2.45)取要求的形式：

$$\mathsf{P}^{(1)}=\frac{1}{\Delta}\mathsf{M}^{(1)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(2)+} \tag{2.46}$$

方程式(2.42)可以用类似的方法建立，结论 2.3 的其余结论由两个子空间$V^{(1)}$和$V^{(2)}$的对称性得到。

对于子空间V的正交投影算子的表达能作为结论 2.3 的一个特殊情况而得到。如果m是V的子行列式矢量，则可写

$$\left.\begin{aligned}
&V^{(1)}=V, \quad V^{(2)}=\widetilde{V}\\
&m^{(1)}=m\\
&m^{(2)}=\widetilde{m}=\mathsf{E}^{(n,p)}m^{*}\\
&\widetilde{m}^{(2)}=\mathsf{E}^{(n,q)}m^{(2)*}=\mathsf{E}^{(n,q)}\mathsf{E}^{(n,p)}m=\pm m
\end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

这里最后一个量得自定义式(2.19)。将$\mathsf{P}^{(1)}$写成$\mathsf{P}_{\parallel}$(平行)，$\mathsf{P}^{(2)}$写成$\mathsf{P}_{\perp}$(垂直)，简单地，得到

$$\mathsf{P}_{\parallel}=\frac{\mathsf{M}\mathsf{M}^{+}}{m^{+}m}, \quad \mathsf{P}_{\perp}=\frac{\widetilde{\mathsf{M}}\widetilde{\mathsf{M}}^{+}}{m^{+}m} \tag{2.48}$$

这里$\mathsf{M}=\mathrm{sp}(m)$和$\widetilde{\mathsf{M}}=\mathrm{sp}(\widetilde{m})$。

由这些结论得到M各列张成V和$\widetilde{\mathsf{M}}$各列张成$\widetilde{V}$。因而，给出一个子行列式矢量，就可用M的列来构成相应子空间的一个基；这就使由一个给定的基来构成子行列式矢量的过程反过来了。$\widetilde{\mathsf{M}}$的各列正交于M的各列，因而有

$$\widetilde{\mathsf{M}}^{+}\mathsf{M}=0 \tag{2.49}$$

这个方程构成许多两次恒等式，由任意子行列式矢量m的元素自动地满足，因而，给出一个适当维数的矢量，除非满足式(2.49)，不然它不会是任何子空间的子行列式矢量。

结论2.3的条件保证了$\Delta\neq0$；稍后将会需要这样情况下的有关结果，即$V^{(1)}$和$V^{(2)}$再次为p和q($p+q=n$)的两个子空间，但具有

一个共同的子空间，在这种情况下，$V^{(1)}$和$V^{(2)}$不充分地张成整个n维空间，且Δ为零，从式(2.39)和(2.40)，对于$\Delta\neq0$，有

$$\mathsf{M}^{(1)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(2)+}\pm\mathsf{M}^{(2)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(1)+}=\Delta 1 \tag{2.50}$$

但可证明当$\Delta=0$时这方程也是成立；这里省略了证明。

值得注意，当矢量$m^{(1)}$和$m^{(2)}$不是对应于两个子空间的子行列式矢量而是简单的适当维数的任意矢量时，这结论是成立的。有如下结论。

结论2.4 对于给定的n，p和$q(n=p+q)$，令$m^{(1)}$和$m^{(2)}$是$\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$维的任意矢量，它们的元素分别由$p$指标和$q$指标的组合来标记，并令$\mathsf{M}^{(1)}$，$\mathsf{M}^{(2)}$，$\widetilde{\mathsf{M}}^{(1)}$和$\widetilde{\mathsf{M}}^{(2)}$是$n\times\binom{n}{p-1}$，$n\times\binom{n}{q-1}$，$n\times\binom{n}{q-1}$和$n\times\binom{n}{p-1}$阶的相应的生成矩阵。因而

(i)
$$\mathsf{M}^{(1)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(2)+}\pm\mathsf{M}^{(2)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(1)+}=\Delta 1 \tag{2.51}$$

这里

$$\Delta=\widetilde{m}^{(2)+}m^{(1)}=\pm\widetilde{m}^{(1)+}m^{(2)} \tag{2.52}$$

和

(ii)
$$\left.\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathsf{M}^{(1)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(2)+}&=p\Delta\\ \mathrm{tr}\mathsf{M}^{(2)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(1)+}&=q\Delta\end{aligned}\right\} \tag{2.53}$$

这是一个纯粹的代数结果，略去证明。

注意，一般来说，$\mathsf{M}^{(1)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(2)+}$和$\mathsf{M}^{(2)}\widetilde{\mathsf{M}}^{(1)+}$将不会是投影算子，虽然，当$m^{(1)}$和$m^{(2)}$为$p$及$q$维的不相交子空间的子行列式矢量时，当然它们是投影算子。重要的是找出：为了使一个矢量m为一子空间的子行列式矢量，它必须满足什么样的条件。已经证明，由式(2.49)表达的两次关系是必要的。用式(2.51)和(2.53)，还证明了它们是充分的。

结论2.5 令m是$\binom{n}{p}$维$(p\leqslant n)$的一个任意非零矢量，它的元素用组合$(i_1, i_2, \cdots, i_p)(1\leqslant i_1\leqslant i_2\cdots\leqslant n)$标记，并令$\mathsf{M}$和$\widetilde{\mathsf{M}}$是生成矩阵

$$\mathsf{M}=\mathrm{sp}(m),\quad \widetilde{\mathsf{M}}=\mathrm{sp}(\widetilde{m})$$

及

$$\tilde{m}=\mathsf{E}^{(n,\ p)}m^*$$

这样，假如且仅仅假如

$$\tilde{\mathsf{M}}^+\mathsf{M}=0 \tag{2.54}$$

则m是p维子空间的子行列式矢量。

充分性证据依赖于用结论2.4来证明，当$\tilde{\mathsf{M}}^+\mathsf{M}=0$时，算子

$$\frac{\mathsf{MM}^+}{m^+m},\quad \frac{\tilde{\mathsf{M}}\tilde{\mathsf{M}}^+}{\tilde{m}^+\tilde{m}}$$

分别是在p和q维的一些空间上的正交投影，略去详述。

现在考虑两个子空间$V^{(1)}$和$V^{(2)}$的情况，它们可以具有一个非零的共同子空间。下面的结论导致出要对这样的一个子空间的存在进行试验，及导出在一维情况下的这个子空间基的一个显式结构。就是这个结构在稍后将被用于非退化本征值的本征函数的计算。

结论2.6 令$V^{(1)}$和$V^{(2)}$是维数为p和q，$p+q=n$的$\mathbb{C}^n$的两个子空间，并令其相应的正交子空间是$\tilde{V}^{(1)}$和$\tilde{V}^{(2)}$。进一步，令$V=V^{(1)}\cap V^{(2)}$和$\tilde{V}=\tilde{V}^{(1)}\cap\tilde{V}^{(2)}$，这样有：

(i)V和$\tilde{V}$两者或都为零，或有相同的维数，比如说s。

(ii)用结论2.3的符号，有

$$\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}\pm\mathsf{M}^{(2)}\tilde{\mathsf{M}}^{(1)+}=\Delta\mathsf{I} \tag{2.55}$$

和

$$\Delta=\tilde{m}^{(2)+}m^{(1)}=\pm\tilde{m}^{(1)+}m^{(2)} \tag{2.56}$$

其中负号仅当p和q两者都是奇数时才采用。且假如也仅假如V和$\tilde{V}$都是非零时，Δ才为零。

(iii)如果$s=1$，则存在非零矢量$v\in V$和$\tilde{v}\in\tilde{V}$，使得有

$$\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}=\mp\mathsf{M}^{(2)}\tilde{\mathsf{M}}^{(1)+}=v\tilde{v}^+ \tag{2.57}$$

(iv)如果$s>1$，则

$$\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}=\mathsf{M}^{(2)}\tilde{\mathsf{M}}^{(1)+}=0 \tag{2.58}$$

证明 第(iii)部分得自这样的事实，$\mathsf{M}^{(1)}$的各列张成于$V^{(1)}$和$\mathsf{M}^{(2)}$的各列张成$V^{(2)}$。因而，由于在式(2.57)中的第一个等式$\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}$的每一列都在共同的子空间$V$中，且按假说它是一维的，这样，

$M^{(1)}\tilde{M}^{(2)+}$必须是一个并矢。类似地，$\tilde{M}^{(2)}M^{(1)+}$的每一列都在$\tilde{V}$中，这样建立了式(2.57)。第(iv)部分得自这样的事实，$M^{(1)}\tilde{M}^{(2)+}$的每一元素是矩阵的余因子，这个矩阵的各列都是$V^{(1)}$和$V^{(2)}$组合基。

稍后要考虑将这些结构推广到$V^{(1)}$和$V^{(2)}$具有高维数的共同子空间情况。

3. 矢量子空间的线性变换

让V是$\mathbb{C}^n$的p维子空间，$\tilde{V}$ 是它的正交子空间。考虑 V 的变换，使得对于$v\in V$，v的象是

$$v' = Uv \tag{3.1}$$

这里U是一个非奇异的$n\times n$复矩阵。因为象空间不受标度因子影响，基本上不失一般性，可假设

$$\det U = 1 \tag{3.2}$$

对于象空间，有

$$V' = UV \tag{3.3}$$

并且对于正交于V'的子空间，使用符号$\tilde{V}'$；注意，一般来说，这是不同于$\tilde{V}$的象。很容易证明

$$\tilde{V}' = \tilde{U}\tilde{V} \tag{3.4}$$

这里定义

$$\tilde{U} \equiv U^{+-1} = U^{-1+} \tag{3.5}$$

与矢量和张量分析类比，可以说，在变换U的条件下，V 是逆变变换，$\tilde{V}$是协变变换。

现在确定这些子空间的子行列式矢量和生成矩阵的变换特性，象先前那样，定义子行列式矢量

$$m = [X:p] \tag{3.6}$$

这里X的各列是V的一个基及

$$\tilde{m} = E^{(n,p)}m^* \tag{3.7}$$

从前面的分析，得知存在$\tilde{V}$的一个基$\tilde{X}$，使有

$$\tilde{m}=[\tilde{X}:q] \tag{3.8}$$

这里$q=n-p$。定义

$$m'=[X':p] \tag{3.9}$$

其中

$$X'=UX \tag{3.10}$$

从式(2.3)立即得到

$$m'=[U:p]m \tag{3.11}$$

现在可以定义

$$\tilde{m}'=E^{(n,p)}m'^{*}=E^{(n,p)}[U^{*}:p]m^{*} \tag{3.12}$$

为了进一步对此简化，需要回顾 $E^{(n,p)}$ 的定义。从式(2.19)，可看到矩阵$E^{(n,p)}[U^{*}:p]$各行都用指标$(i_1, i_2\cdots i_q)$组合来标记，同时各列用$(j_1\cdots j_p)$来标记；它的元素是

$$e_{(i_1i_2\cdots i_q)(k_1\cdots k_p)}U^{*j_1}_{[k_1}U^{*j_2}_{k_2}\cdots U^{*j_p}_{k_p]} \tag{3.13}$$

这里[ ]代表完全反对称化及( )内边的指标仅对全部组合求和。应用恒等式(2.27)可以证明

$$e_{i_1i_2\cdots i_q(k_1\cdots k_p)}U^{*j_1}_{[k_1}U^{*j_2}_{k_2}\cdots U^{*j_p}_{k_p]}$$

$$=\det U^{*}\tilde{U}^{[k_1}_{i_1}\tilde{U}^{k_2}_{i_2}\cdots\tilde{U}^{k_q]}_{i_q}e_{k_1\cdots k_q(j_1\cdots j_p)} \tag{3.14}$$

即 $$E^{(n,p)}[U^{*}:p]=[\tilde{U}:q]E^{(n,p)} \tag{3.15}$$

用此结果，式(3.12)简单地变成

$$\tilde{m}'=[\tilde{U}:q]\tilde{m} \tag{3.16}$$

因为式(3.11)和(3.16)的变换特性，可以说m是"p型的一个逆变矢量"而$\tilde{m}$是"q型的一个协变矢量"。"类型"是用在变换中的子行列式的阶。还从式(3.15)，有

$$E^{(n,p)}=[\tilde{U}:q]E^{(n,p)}[\tilde{U}^{T}:p] \tag{3.17}$$

类似地，有

$$E^{(n,p)}=[U:q]E^{(n,p)}[U^{T}:p] \tag{3.18}$$

因而可以说，$E^{(n,p)}$ 既作逆变变换也作协变变换，像一个"(q,p)型的各向同性二秩张量"。

下一步考虑生成矩阵 $\mathrm{M}=\mathrm{sp}(m)$，$\widetilde{\mathrm{M}}=\mathrm{sp}(\tilde{m})$ 的变换特征。更一般情况，对于任意子行列式矢量$m_{(i_1\cdots i_p)}$，定义由组合$(i_1\cdots i_s)$标记各行及由组合$(i_{s+1}\cdots i_p)$标记各列的矩阵$\mathrm{M}^{(s,\,p-s)}$，按照

$$M^{(s,\,p-s)}_{(i_1\cdots i_s)(i_{s+1}\cdots i_p)}=\begin{cases}0 & \text{如果在指标}(i_1\cdots i_p)\text{中有重复}\\ \pm m_{(j_1\cdots j_p)} & \text{这里}(j_1\cdots j_p)\text{是偶数，标}(+)\text{或奇数，标}(-)\text{，按递增序号安排}(i_1\cdots i_p)\text{的置换}\end{cases} \tag{3.19}$$

因而，生成矩阵式(2.36)是特殊情况，

$$\mathrm{M}=\mathrm{sp}(m)=\mathrm{M}^{(1,\,p-1)},\ \widetilde{\mathrm{M}}=\mathrm{sp}(\tilde{m})=\widetilde{\mathrm{M}}^{(1,\,q-1)} \tag{3.20}$$

还可以写成

$$m=\mathrm{M}^{(p,\,0)} \tag{3.21}$$

现在证明，矩阵$\mathrm{M}^{(s,\,p-s)}$和$\widetilde{\mathrm{M}}^{(s,\,q-s)}$分别是：$(s,p-s)$和$(s,\ q-s)$型的"逆变和协变二秩张量"，即它们按下式变换

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{M}^{(s,\,p-s)\prime}&=[\mathrm{U}:s]\mathrm{M}^{(s,\,p-s)}[\mathrm{U}^{\mathrm{T}}:p-s]\\ \widetilde{\mathrm{M}}^{(s,\,q-s)\prime}&=[\widetilde{\mathrm{U}}:s]\widetilde{\mathrm{M}}^{(s,\,q-s)}[\widetilde{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}:q-s]\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

这些直接得自m和$\tilde{m}$的变换特性。有

$$m'=[\mathrm{U}:p]m \tag{3.23}$$

即求

$$\begin{aligned}m'_{(i_1\cdots i_p)}&=U^{[j_1}_{i_1}U^{j_2}_{i_2}\cdots U^{j_p]}_{i_p}m_{(j_1\cdots j_p)}\\ &=U^{[j_1}_{i_1}U^{j_2}_{i_2}\cdots U^{j_s]}_{i_s}U^{[j_{s+1}}_{i_{s+1}}\cdots U^{j_p]}_{i_p}M_{(j_1\cdots j_s)(j_{s+1}\cdots j_p)}\end{aligned} \tag{3.24}$$

式中第二行得自这些反对称化求和的组合特性。特别是，对于生成矩阵$\mathrm{M}\equiv\mathrm{sp}(m)$和$\widetilde{\mathrm{M}}\equiv\mathrm{sp}(\tilde{m})$，有

$$\mathrm{M}'=\mathrm{UM}[\mathrm{U}^{\mathrm{T}}:p-1],\ \widetilde{\mathrm{M}}'=\widetilde{\mathrm{U}}\mathrm{M}[\widetilde{\mathrm{U}}^{\mathrm{T}}:q-1] \tag{3.25}$$

这里推得的变换规则能用来建立在特殊简化条件下推得结果的普遍有效性。特别是对于任意基，可选择一个变换 U，将它映成一个正交基

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix} \tag{3.26}
$$

为了说明这点，现在概要地证明结论2.6的如下推广。

结论3.1 令$V^{(1)}$和$V^{(2)}$是维数为p和q的$\mathbb{C}^n$的二个子空间，且相应的正交子空间是$\tilde{V}^{(1)}$和$\tilde{V}^{(2)}$。进一步，设$V^{(1)}$和$V^{(2)}$具有一个最大的维数为$s(\geqslant 0)$的共同子空间 $V=V^{(1)}\cap V^{(2)}$，这样，$\tilde{V}^{(1)}$和$\tilde{V}^{(2)}$具有一个最大的维数是$n-p-q+s$的共同子空间 $\tilde{V}=\tilde{V}^{(1)}\cap\tilde{V}^{(2)}$。如果$m$是$V$的子行列式矢量及$\tilde{m}$是$\tilde{V}$的子行列式矢量，则对于 $0\leqslant t<s$，有

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{M}^{(1)(t,\ p-t)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)(n-p-q+t,\ p-t)+} \\
&\quad=\mathsf{M}^{(2)(t,\ q-t)}\tilde{\mathsf{M}}^{(1)(n-p-q+t,\ q-t)+}=0
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

及对于某一非零的α，有

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{M}^{(1)(s,\ p-s)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)(n-p-q+s,\ p-s)^+} \\
&\quad=\mp\mathsf{M}^{(2)(s,\ q-s)}\tilde{\mathsf{M}}^{(1)(n-p-q+s,\ q-s)^+}=\alpha m\tilde{m}^+
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

这里$\mathsf{M}^{(1)}$和$\mathsf{M}^{(2)}$分别由$V^{(1)}$和$V^{(2)}$的式(3.19)给定。且仅当 s是奇数及p，q都为奇数时，或者s是偶数而p，q 都不是奇数时取下边符号。

证明 首先注意到，由于上面得到的变换特性，因而在线性变换下(有单位行列式)结果是不变的。很清楚有可能选择 $\mathbb{C}^n$ 的一个

基，使得$V^{(1)}$，$V^{(2)}$，$V^{(1)}\cap V^{(2)}$，$\tilde{V}^{(1)}$，$\tilde{V}^{(2)}$，$\tilde{V}^{(1)}\cap\tilde{V}^{(2)}$都是由基的某些子集张成的。因而可以定义一个变换，将此基映成基式(3.26)。对于这个特殊的基，结论3.1很容易证实，因为对于$t<s$，对矩阵乘积的全部贡献为零，且对于$t=s$，则仅有一个单独的非零项。

结论3.1建立了用矢量子空间的子行列式矢量对矢量子空间进行的一类计算。给定两个子空间$V^{(1)}$和$V^{(2)}$的子行列式矢量，结论3.1给出一个确定$V^{(1)}\cap V^{(2)}$的维数算法及确定这子空间的子行列式矢量的一个公式。定义两个子空间$V^{(1)}\cup V^{(2)}$的并集，它是所采用的矢量$V^{(1)}$和$V^{(2)}$所张成的空间。注意，$V^{(1)}\cup V^{(2)}$是正交于$\tilde{V}^{(1)}\cap\tilde{V}^{(2)}$的空间，结论3.1也可用来计算$V^{(1)}\cup V^{(2)}$的维数及它的子行列式矢量。

这里推导的有限变换的特性能很容易用来寻求无限小变换的特性。考虑变换U无限小地接近单位变换：

$$\mathsf{U}=1+\epsilon\mathsf{A} \tag{3.29}$$

这里A是一个复的$n\times n$阶矩阵，ϵ是一个小参量，在以后相继的分析中，ϵ^2阶及更高阶项将被略去。限制

$$\det\mathsf{U}=1 \tag{3.30}$$

要求

$$\mathrm{tr}(\mathsf{A})=0 \tag{3.31}$$

上述表明，对于某个p，子行列式矢量及另外推得的一些量能用形式如$[\mathsf{U}:p]$或$[\mathsf{U}^{-1+}:p]$的矩阵进行变换。用式(3.29)给定的U，可写成

$$[\mathsf{U}:p]=1+\epsilon\mathsf{A}^{(p)}+O(\epsilon^2) \tag{3.32}$$

作为$\mathsf{A}^{(p)}$的定义。另外，很容易证明

$$[\mathsf{U}^{-1+}:p]=1-\epsilon\mathsf{A}^{(p)+}+O(\epsilon^2) \tag{3.33}$$

注意$\mathsf{A}^{(p)}$是一个$\binom{n}{p}\times\binom{n}{p}$阶的正方矩阵，它的行和列用象对$p$阶子行列式同样的方法，由指标的组合标记。可以证明（Gilbert和Backus，1966），用A的元素按如下规则给定$\mathsf{A}^{(p)}$的元素：

$$A^{(p)}_{(i_1\cdots i_p)(j_1\cdots j_p)}=\begin{cases} A_{i_1j_1}+A_{i_2j_2}+\cdots A_{i_pj_p} & \text{若 } i_1=j_1, i_2=j_2, i_3=j_3, \cdots, i_p=j_p \\ \pm A_{ij} & \text{若存在 }(j_1\cdots j_p)\text{，一个偶置换(+)或奇置换(−)，这种置换使它除了两个元素外，都与}(i_1\cdots i_p)\text{一致，即 } i\in\{i_1\cdots i_p\},\ j\in\{j_1\cdots j_p\},\ i\neq j\text{，它们不相等} \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (3.34)$$

与有限变换的每一个结论相对应，存在着用$\mathsf{A}^{(p)}$表示的无限小变换的结果。从式(3.11)，有

$$m'=m+\epsilon\mathsf{A}^{(p)}m \quad (3.35)$$

从式(3.16)

$$\tilde{m}'=\tilde{m}-\epsilon\mathsf{A}^{(q)+}\tilde{m} \quad (3.36)$$

由式(3.17)和(3.18)

$$\mathsf{A}^{(q)+}\mathsf{E}^{(n,p)}+\mathsf{E}^{(n,p)}\mathsf{A}^{(p)*}=0 \quad (3.37)$$

$$\mathsf{A}^{(q)}\mathsf{E}^{(n,p)}+\mathsf{E}^{(n,p)}\mathsf{A}^{(p)\mathrm{T}}=0 \quad (3.38)$$

由式(3.22)

$$\mathsf{M}^{(s,p-s)'}=\mathsf{A}^{(s)}\mathsf{M}^{(s,p-s)}+\mathsf{M}^{(s,p-s)}\mathsf{A}^{(p-s)\mathrm{T}} \quad (3.39)$$

$$\tilde{\mathsf{M}}^{(s,q-s)'}=-\mathsf{A}^{(s)+}\tilde{\mathsf{M}}^{(s,q-s)}-\tilde{\mathsf{M}}^{(s,q-s)}\mathsf{A}^{(q-s)*} \quad (3.40)$$

及由式(3.25)

$$\mathsf{M}'=\mathsf{A}\mathsf{M}+\mathsf{M}\mathsf{A}^{(p-1)\mathrm{T}} \quad (3.41)$$

$$\tilde{\mathsf{M}}'=-\mathsf{A}^{+}\tilde{\mathsf{M}}-\tilde{\mathsf{M}}\mathsf{A}^{(q-1)*} \quad (3.42)$$

4. 线性常微分方程组

回到第一节总结的本征值问题上来，考虑n阶系统

$$\frac{dy}{dx}A(x,\ \lambda)y \quad x\in[x_1, x_2] \tag{4.1}$$

和边界条件

$$y(x_\alpha)\in\bar{V}^{(\alpha)} \qquad (\alpha=1,\ 2) \tag{4.2}$$

这里$\bar{V}^{(\alpha)}$是n_α维的矢量空间，它满足$n_1+n_2=n$。假说，基本上不失一般性，$\mathrm{tr}(A)=0$；如果这条件不被满足，则重新定义独立变量

$$y'=y\exp\left\{-\frac{1}{n}\int^x \mathrm{tr}(A)dx\right\} \tag{4.3}$$

导出式(4.1)形式的一个系统，其中系统矩阵A是零迹。对于一个自伴系统，可证明 tr(A)是虚数，且上述变换保持自伴特性式(1.15)。象在第一节那样，选择$\bar{V}^{(\alpha)}$的基$\{\bar{\sigma}_k^{(\alpha)}\}$和定义$\{\sigma_k^{(\alpha)}(x,\lambda)\}$为初始值问题式(1.3)的解。微分方程式(1.3)可认为象在基矢量中定义无限小变换一样：

$$\sigma_k^{(\alpha)}(x+dx)=(1+A(x)dx)\sigma_k^{(\alpha)}(x) \tag{4.4}$$

从$\{\sigma_k^{(\alpha)}(x)\}$形成子行列式矢量 $m^{(\alpha)}(x)$，结果式(3.35)引出方程

$$\frac{dm^{(\alpha)}}{dx}=A^{(n_\alpha)}m^{(\alpha)} \tag{4.5}$$

这里 $A^{(n_\alpha)}$由式(3.34)定义，这些方程最早由 Gilbert 和 Backus (1966)推得。

正交于$V^{(\alpha)}$的子空间子行列式矢量由式(2.38)给出

$$\tilde{m}^{(\alpha)}=E^{(n,\ n_\alpha)}m^{(\alpha)*} \tag{4.6}$$

且从式(3.36)得到

$$\frac{d\tilde{m}}{dx}=-A^{(n-n_\alpha)+}\tilde{m}^{(\alpha)} \tag{4.7}$$

因而$\tilde{m}^{(\alpha)}$是伴随问题式(1.5)、(1.6)中产生的子行列式矢量。

如果λ是非退化本征值，则有子行列式矢量的$m^{(1)}(x)$，$m^{(2)}(x)$的矢量空间$V^{(1)}(x)$和$V^{(2)}(x)$，具有一个包含有全部 x 的本征函数的一维共同子空间。类似地，正交于$V^{(1)}$和$V^{(2)}$的子空间$\bar{V}^{(1)}(x)$和

$\tilde{V}^{(2)}(X)$，具有一个包含有伴随本征函数的一维共同子空间。用结论(2.6)，这些子空间可从下列矩阵中求得

$$\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}=\mp\mathsf{M}^{(2)}\tilde{\mathsf{M}}^{(1)+} \tag{4.8}$$

其中$\mathsf{M}^{(\alpha)}=\mathrm{sp}(\mathrm{m}^{(\alpha)})$和$\tilde{\mathsf{M}}^{(\alpha)}=\mathrm{sp}(\tilde{\mathsf{M}}^{(\alpha)})$(见式(2.36))，下边的符号仅当$n_1$和$n_2$都是奇数时应用。矩阵式(4.8)将被保证为形式如

$$\mathsf{v}\tilde{\mathsf{v}}^{+}$$

的并矢。

其中

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{v}\in V^{(1)}(x)\cap V^{(2)}(x) \\ \tilde{\mathsf{v}}\in\tilde{V}^{(1)}(x)\cap\tilde{V}^{(2)}(x) \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

这里，证明如下：

结论4.1 如果λ是一个非退化本征值，$y(x)$和$\tilde{y}(x)$是原来问题和它的伴随问题的本征函数，则存在一个非零常量α，使得

$$\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}=\mp\mathsf{M}^{(2)}\tilde{\mathsf{M}}^{(1)+}=\alpha y y^{+} \tag{4.10}$$

证明由结论2.6保证，对某一函数$\alpha(x)$，这是真实的，且仅须证明：α事实上与x无关。从式(3.41)和(3.42)，可推得

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}\mathsf{M}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x}=\mathsf{A}\mathsf{M}^{(\alpha)}+\mathsf{M}^{(\alpha)}\mathsf{A}^{(n_\alpha-1)\mathrm{T}} \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{\mathsf{M}}^{(\alpha)}}{\mathrm{d}x}=-\mathsf{A}^{+}\tilde{\mathsf{M}}^{(\alpha)}-\tilde{\mathsf{M}}^{(\alpha)}\mathsf{A}^{(n-n_\alpha-1)*} \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+})&=\mathsf{A}\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}-\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}\mathsf{A} \\ &=\alpha(\mathsf{A}y\tilde{y}^{+}-y\tilde{y}^{+}\mathsf{A}) \\ &=\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\tilde{y}^{+}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

所以，用式(4.10)，得到所要求的

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=0 \tag{4.13}$$

结论4.1使得能用分解并矢$\mathsf{M}^{(1)}\tilde{\mathsf{M}}^{(2)+}$来找到本征函数，仅相差

一个与x有关的乘子。一般说来，这个乘子能用在区间$[x_1, x_2]$上积分一个单独的一阶微分方程而得到。因为$\mathrm{M}^{(1)}\widetilde{\mathrm{M}}^{(2)+}$是一个并矢，所以存在矢量$u$和$\tilde{u}$，唯一到对于每一个$x$的乘子，因而

$$\mathrm{M}^{(1)}\widetilde{\mathrm{M}}^{(2)+}=u\tilde{u}^{+} \tag{4.14}$$

如果$u(x)$和$\tilde{u}(x)$是满足式(4.14)的可微矢量，则从结论 4.1 知道存在标量函数$\beta(x)$和$\tilde{\beta}(x)$，使得由下式给出的$y(x)$和$\tilde{y}(x)$

$$y(x)=\beta(x)u(x) \tag{4.15}$$

$$\tilde{y}(x)=\tilde{\beta}(x)\tilde{u}(x) \tag{4.16}$$

是本征函数。也从结论4.1得到：$\tilde{\beta}^{*}(x)\beta(x)=$常量，因此可以选择$\tilde{\beta}(x)=1/\beta^{*}(x)$

将式(4.15)代入(4.1)，用u^{+}乘以左边，得到

$$\beta=\exp\left\{\int^{x}\frac{u^{+}\mathrm{A}u-u^{+}\dot{u}}{u^{+}u}\mathrm{d}x\right\} \tag{4.17}$$

这样，由式(4.15)和(4.17)确定本征函数，仅相差一个全部归一化因子。

对于自伴系统(第 1 节)，可取$\tilde{y}=\Sigma y$。这样，得出：

$$\mathrm{M}^{(1)}\widetilde{\mathrm{M}}^{(2)+}\Sigma=\alpha yy^{+} \tag{4.18}$$

分解上式左边，y可被确定到相差具有常数模$|\beta(x)|$的因子$\beta(x)$。如果，另外，系统是实的，如象给定自由振荡方程的情况，有

$$\mathrm{M}^{(1)}\widetilde{\mathrm{M}}^{(2)\mathrm{T}}\Sigma=\alpha yy^{\mathrm{T}} \tag{4.19}$$

且如果左边已知，$y(x)$能被确定到对于每一个x相差一个正负号。对于每一个x必须选择正负号，以保证$y(x)$是连续的。这样，在一个实的自伴系统的情况中，本征函数能单独地从子行列式中求得，且不要求进行式(4.17)形式的积分。方程式(4.19)是下面要讨论的简正振型算法中，对本征函数结构中的基。

从这点出发，限制考虑实自伴系统。正象上面指出的那样(第 1 节)，这样的一些系统必定是偶系数阶n，及$n_1=n_2=\frac{1}{2}n$。给出基$\{\sigma_{x}^{(\alpha)}(x,\lambda)\}$($\alpha=1$或2)，前面的分析导致到两个不同的构成

正交空间$\bar{V}^{(\alpha)}$的子行列式矢量的方法。首先有结论(4.6)，其次，借助于式(1.17)，矢量$\{\Sigma\sigma^{(\alpha)}\}$张成$\bar{V}^{(\alpha)}$，且由这些形成的子行列式矢量$[\Sigma:n_1]m^{(\alpha)}(x)$，也是$\bar{V}^{(\alpha)}$的一个子行列式矢量。因为由这两个结构给出的子行列式矢量都是相同空间的子行列式矢量，所以它们必须是平行的(结论2.1)；即存在一个非零标量β，使得

$$[\Sigma:n_1]m^{(\alpha)}=\beta E^{(n,n_1)}m^{(\alpha)*} \tag{4.20}$$

或用式(2.33)

$$E^{(n,n_1)T}[\Sigma:n_1]m^{(\alpha)}=\beta m^{(\alpha)} \tag{4.21}$$

这里，用$m^{(\alpha)}$是实数这个事实。方程式(4.21)是一个关于β的本征值方程。这里指明，β唯一可能的值是$\beta=1$，因而$m^{(\alpha)}$被限制在属于这个本征值的子空间内。这个限制有效地降低了为求得$m^{(\alpha)}(x)$而必须要解的微分系统式(4.5)的维数。在下面可看到，对于4阶系统，子行列式微分系统的阶数从6降到5，而对于6阶系统，则从20降到14。对于一个阶数为$n=2p$系统，子行列式微分系统的阶数从$\binom{n}{p}$降到$\frac{1}{2}\binom{n}{p}+2^{p-1}$。为了说明$\beta=1$，现在证明如下：

结论4.2 令n是一个偶数：$n=2p$，且令Σ是形式如式(1.14)的$n\times n$阶矩阵。这样，有如下内容：

(i)由下式定义的矩阵Ξ

$$\Xi=E^{(n,p)T}[\Sigma:p] \tag{4.22}$$

是对称的，且满足

$$\Xi^2=1 \tag{4.23}$$

因而，Ξ具有两个正交本征空间W^+和W^-，比如说，它们分别属于本征值1和-1；

(ii)如S是一个实的$n\times p$阶矩阵，满秩p，满足

$$S^T\Sigma S=0 \tag{4.24}$$

则它的子行列式矢量$m=[S:p]$位于W^+内；

(iii)子空间W^+和W^-的维数是$\frac{1}{2}\binom{n}{p}\pm2^{p-1}$。

证明 首先注意，作为它们的定义与式(2.33)一起的一个推断，$\mathsf{E}^{(n,p)}$和$[\Sigma:p]$满足

$$\mathsf{E}^{(n,p)\mathrm{T}}=(-1)^{p}\mathsf{E}^{(n,p)},\qquad \mathsf{E}^{(n,p)2}=(-1)^{p}\mathsf{1} \tag{4.25}$$

$$[\Sigma:p]^{\mathrm{T}}=(-1)^{p}[\Sigma:p],\qquad [\Sigma:p]^{2}=(-1)^{p}\mathsf{1} \tag{4.26}$$

因为$\det\Sigma=1$，所以式(3.18)能用来得到

$$\mathsf{E}^{(n,p)}=[\Sigma:p]\mathsf{E}^{(n,p)}[\Sigma:p]^{\mathrm{T}} \tag{4.27}$$

$$\mathsf{E}^{(n,p)}[\Sigma:p]=[\Sigma:p]\mathsf{E}^{(n,p)} \tag{4.28}$$

因此$[\Sigma:p]$和$\mathsf{E}^{(n,p)}$是实的正交矩阵，它们可相互交换，且按p是偶数还是奇数而确定是对称的还是反对称的。上面(i)条件下的结论立即得自这些性质。

从导出式(4.21)的论据，有

$$\Xi m=\beta m \tag{4.29}$$

对某一非零的β，用式(4.23)，它有值为1或-1。由直接计算可以证明，由组合$(1,2,\cdots,p)$标记的Ξ的行，仅有单一的非零元素

$$\Xi_{(1,2,\cdots,p)(1,2,\cdots,p)}=1$$

从(4.29)的$(1,2,\cdots,p)$元素，得到；如果$m_{(1,2,3,\cdots,p)}$非零，则β必定等于1。对于许多实际目的，可确信$m_{(1,2,\cdots,p)}\neq0$，或者在某些与m连续地有关的参数域上，几乎到处都是这样，在那样的情况下，$\beta=1$的推论已被证明。为在一般情况下建立结论4.2，因而，考虑变换

$$\mathsf{S}'=\mathsf{US} \tag{4.30}$$

这里U是复的分块矩阵，

$$\mathsf{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\mathsf{1} & \mathrm{i}\mathsf{1}\\ \mathrm{i}\mathsf{1} & \mathsf{1}\end{bmatrix} \tag{4.31}$$

可直接证明$\det\mathsf{U}=1$及

$$\Sigma\mathsf{U}=\mathsf{U}^{-1\mathrm{T}}\Sigma \tag{4.32}$$

也从式(3.18)，有

$$\mathsf{E}^{(n,p)}[\mathsf{U}^{-1\mathrm{T}}:p]=[\mathsf{U}:p]\mathsf{E}^{(n,p)} \tag{4.33}$$

因而

$$
\begin{aligned}
[U:p]\Xi &= [U:p](-1)^p E^{(n,p)}[\Sigma:p] \\
&= (-1)^p E^{(n,p)}[U^{-1T}:p][\Sigma:p] \\
&= (-1)^p E^{(n,p)}[\Sigma:p][U:p] \\
&= \Xi[U:p]
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

即$[U:p]$与Ξ交换，因而写成

$$m' = [US:p] = [U:p]m \tag{4.35}$$

式(4.29)变成

$$\Xi m' = \beta m' \tag{4.36}$$

如上所述，只要$m'_{(1,2,\cdots,p)} \neq 0$就得到$\beta = 1$的结论。为了完成证明，现在证明条件$m'_{(1,2,\cdots,p)} \neq 0$总是被满足的。写成

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

这里S_1和S_2是$p \times p$阶子矩阵，有

$$m'_{(1,2,\cdots,p)} = \det \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + iS_2) \tag{4.38}$$

及从式(4.24)，有

$$S_1^T S_2 - S_2^T S_1 = 0 \tag{4.39}$$

现在，如果$m'_{(1,2,\cdots,p)} = 0$，矩阵$S_1 + iS_2$是奇异的，且因此 存 在一个非零p矢量x，它满足

$$(S_1 + iS_2)x = 0 \tag{4.40}$$

从上式得到

$$
\begin{aligned}
0 &= |(S_1 + iS_2)x|^2 \\
&= x^+(S_1^T - iS_2^T)(S_1 + iS_2)x \\
&= x^+(S_1^+ S_1 + S_2^+ S_2)x + ix^+(S_1^T S_2 - S_2^T S_1)x
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

因为由式(4.39)，第二项为零，得到

$$|S_1 x|^2 + |S_2 x|^2 = 0 \tag{4.42}$$

由此，推得

$$S_1 x = 0, \quad S_2 x = 0 \tag{4.43}$$

且因而有

$$\mathsf{S}x=0 \tag{44.4}$$

但这违反了S是满秩p的假设，因而要求$m'_{1,2,\cdots,p}\neq 0$。从而完成了结论4.2的证明，但除去(iii)外，而(iii)的证明被略去。

接着考虑一个与实的自伴系统有关的投影算子的不同推导。用$\mathsf{S}^{(\alpha)}(x,\lambda)(\alpha=1,2)$代表列为$\sigma_k^{(\alpha)}(x,\lambda)(k=1,2,\cdots,n_1)$的$n\times n^1$阶矩阵。用式(1.3)，(1.15)和(1.16)，有

$$\frac{d\mathsf{S}^{(\alpha)}}{dx}=\mathsf{A}(x,\lambda)\mathsf{S}^{(\alpha)} \tag{4.45}$$

$$\mathsf{S}^{(\alpha)\mathrm{T}}\Sigma\mathsf{S}^{(\alpha)}=0 \tag{4.46}$$

$$\frac{d}{dx}(\mathsf{S}^{(1)\mathrm{T}}\Sigma\mathsf{S}^{(2)})=0 \tag{4.47}$$

及与上面引入的子行列式矢量$m^{(\alpha)}(x,\lambda)$和$\tilde{m}^{(\alpha)}(x,\lambda)$简单地为

$$m^{(\alpha)}=[\mathsf{S}^{(\alpha)};n_1] \tag{4.48}$$

$$\tilde{m}^{(\alpha)}=\mathsf{E}^{(n,n_1)}m^{(\alpha)}=[\Sigma\mathsf{S}^{(\alpha)}:n_1] \tag{4.49}$$

这里第二个等式得自式(4.20)，其中$\beta=1$。暂时假设：一起取定$\mathsf{S}^{(1)}$和$\mathsf{S}^{(2)}$的各列张成$\mathbb{C}^n$，即由式(1.4)给出的矩阵S是非奇异的。这样，对于任意矢量x，可写出

$$x=x^{(1)}+x^{(2)} \tag{4.50}$$

这里，对于某些n_1矢量$k^{(1)}$和$k^{(2)}$，有

$$x^{(1)}=\mathsf{S}^{(1)}k^{(1)},\quad x^{(2)}=\mathsf{S}^{(2)}k^{(2)} \tag{4.51}$$

用$\mathsf{S}^{(1)\mathrm{T}}\Sigma$左乘式(4.50)，并用式(4.46)，得到

$$\mathsf{S}^{(1)\mathrm{T}}\Sigma x=\mathsf{S}^{(1)\mathrm{T}}\Sigma\mathsf{S}^{(2)}k^{(2)} \tag{4.52}$$

因而，求解$k^{(2)}$并代入式(4.51)，得到

$$x^{(2)}=\mathsf{S}^{(2)}\mathsf{X}^{-1}\mathsf{S}^{(1)\mathrm{T}}\Sigma x \tag{4.53}$$

且类似地有

$$x^{(1)}=-\mathsf{S}^{(1)}\mathsf{X}^{\mathrm{T}-1}\mathsf{S}^{(2)\mathrm{T}}\Sigma x \tag{4.54}$$

这里，已引入$n_1\times n_1$阶矩阵

$$\mathsf{X}\equiv\mathsf{S}^{(1)\mathrm{T}}\Sigma\mathsf{S}^{(2)} \tag{4.55}$$

它(由式(4.7))独立于x。在式(4.33)和(4.54)中乘以x的这些矩

阵，按定义，是分别由$S^{(2)}$和$S^{(1)}$的各列生成空间上的投影算子，而且可以让它们等同于前面得到的投影算子（结论2.3）；即

$$-S^{(1)}X^{T-1}S^{(2)T}\Sigma=\frac{1}{\Delta}M^{(1)}\widetilde{M}^{(2)+} \tag{4.56}$$

$$S^{(2)}X^{-1}S^{(1)T}\Sigma=\pm\frac{1}{\Delta}M^{(2)}\widetilde{M}^{(1)T+} \tag{4.57}$$

其中

$$\Delta=\widetilde{m}^{(2)T}m^{(1)}=\pm\widetilde{m}^{(1)T}m^{(2)} \tag{4.59}$$

这里，如果n_1是奇数，则取下面的符号，且有

$$M^{(\alpha)}=sp(m^{(\alpha)}),\quad \widetilde{M}^{(\alpha)}=sp(\widetilde{m}^{(\alpha)}) \tag{4.60}$$

进而，取式(4.55)的一些n_1阶子行列式

$$\begin{aligned}\det X&=m^{(1)T}[\Sigma:n_1]m^{(2)}\\&=m^{(1)T}\widetilde{m}^{(2)}\quad \text{由}(4.49)\\&=\Delta\end{aligned} \tag{4.61}$$

因而可写

$$\left.\begin{aligned}S^{(1)}\overline{X}^{T}S^{(2)T}&=M^{(1)}\widetilde{M}^{(2)+}\Sigma\\S^{(2)}\overline{X}S^{(1)T}&=\pm M^{(2)}\widetilde{M}^{(1)+}\Sigma\end{aligned}\right\} \tag{4.62}$$

这里$\overline{X}$表示伴随矩阵：

$$\overline{X}_{ij}=x_{ji}\text{的余因子} \tag{4.63}$$

虽然这里给出的推导依赖于假设 $\Delta\neq0$。事实上可以证明：式(4.62)一般说来是有效的；下面略去对它的证明。

从结论4.1，现在提出如下结论。

结论4.3 如果λ是n阶实自伴系统式(1.1)，(1.2)的非退化本征值及$y(x)$是相关的本征函数，则存在一个常数α，有

$$\left.\begin{aligned}S^{(1)}\overline{X}^{T}S^{(2)T}&=S^{(2)}\overline{X}S^{(1)T}\\M^{(1)}\widetilde{M}^{(2)T}\Sigma&=\mp M^{(2)}\widetilde{M}^{(1)T}\Sigma=\alpha yy^{T}\end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

这里，$\overline{X}=\mathrm{adj}(S^{(1)T}\Sigma S^{(2)})$，且与$x$无关。仅当$\frac{1}{2}n$是奇数时用下边符号。在式(4.64)中的其他符号同以前定义过的一样。

当用子行列式表示的本征函数并矢更适合于数值计算时，则在所得的理论结果推导中，用$S^{(1)}$和$S^{(2)}$表达是有用的。

再次假设$\Delta \neq 0$，即由式(1.4)定义的$S(x)$

$$S(x)=[S^{(1)}(x) \quad S^{(2)}(x)] \tag{4.65}$$

是一个基本矩阵。对于任意$x, x_0 \in [x_1, x_2]$，传播矩阵或矩阵级数$P(x, x_0)$(Coddington和Levinson, 1955; Gilbert和Backus, 1966)能写成为

$$P(x, x_0)=S(x)S^{-1}(x_0) \tag{4.66}$$

特征式(4.46)能用来证明$P(x, x_0)$可写成为

$$P(x, x_0)=(S^{(2)}(x)X^{-1}S^{(1)T}(x_0)-S^{(1)}(x)X^{-1T}S^{(2)T}(x_0))\Sigma \tag{4.67}$$

这里X是在式(4.55)中定义的$n_1 \times n_1$阶常数矩阵。为了证明这点，仅须校验：在$\alpha=1,2$的情况下及由式(4.67)给定的$P(x, x_0)$，有$P(x, x_0)S^{(\alpha)}(x_0)=S^{(\alpha)}(x)$。

现在用这结论来计算导数$d\Delta/d\lambda$，这里λ是本征值参数。首先计算$S^{(\alpha)}_\lambda$，其中下标λ代表在常量x处的偏导数。式(4.45)对λ微商，得到

$$\frac{d}{dx}S^{(\alpha)}_\lambda=AS^{(\alpha)}_\lambda+A_\lambda S^{(\alpha)} \tag{4.68}$$

由此并用标准方法，得到

$$S^{(\alpha)}_\lambda(x)=\int_{x_\alpha}^{x} P(x, x')A_\lambda(x')S^{(\alpha)}(x')dx+P(x, x_\alpha)S^{(\alpha)}_\lambda(x_\alpha)$$

$$\alpha=1\text{或}2 \tag{4.69}$$

假设给出的边界条件不依赖于λ，这样，式(4.69)中的第二项消失。用式(4.55)，(4.61)和恒等式，有

$$(\det X)_\lambda=\mathrm{tr}(X_\lambda \overline{X}) \tag{4.70}$$

经过一定代数运算后，得到

$$\Delta_\lambda=-\mathrm{tr}\left\{\int_{x_1}^{x_2} S^{(2)}\overline{X}S^{(1)T}\Sigma A_\lambda dx\right\} \tag{4.71}$$

这个结果还被证明在$\Delta=0$的情况时也成立。因而注意，从结论4.2，当$\Delta=0$，有

$$\Delta_\lambda=-\alpha\int_{x_1}^{x_2}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{A}_\lambda\mathbf{y}\ \mathrm{d}x \tag{4.72}$$

这里y是本征函数，假设为非退化的。用(1.15)和所假设的A的实数性，矩阵ΣA以及$\Sigma\mathbf{A}_\lambda$是对称的。由 Sturm-Liouville 理论的推动，也由于简正振型方程(看下面)特性的推动，将假设对在研究区间$[\lambda_1, \lambda_2]$中的λ，$-\Sigma\mathbf{A}_\lambda$是半正定的，且进一步假设它有这样的特性，即如果对于式(1.1)的解$\mathbf{y}(x)$，在全部$x\in[x_1, x_2]$情况，有$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{A}_\lambda\mathbf{y}=0$，则对于全部$x\in[x_1, x_2]$，$\mathbf{y}(x)$必须为零，即将考虑这类本征值问题，它允许从式(4.72)中推论：得$\Delta_\lambda\neq0$和$\mathrm{sgn}\,\Delta_\lambda=\mathrm{sgn}\,\alpha$。将继续证明，地球简正振型的本征值问题属于这类问题，它是Sturm-Liouville一类问题的推广。定义归一化的本征函数

$$\hat{\mathbf{y}}(x)\equiv\left\{-\int_{x_1}^{x_2}\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{A}_\lambda\mathbf{y}\,\mathrm{d}x\right\}^{-1/2}\mathbf{y}(x) \tag{4.73}$$

这样，简单地有(结论4.3)

$$\mathbf{M}^{(1)}\widetilde{\mathbf{M}}^{(2)\mathrm{T}}\Sigma=\Delta_\lambda\hat{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}} \tag{4.74}$$

这个方程有重要的结论，即当λ是本征值时，$\mathbf{M}^{(1)}\widetilde{\mathbf{M}}^{(2)}\Sigma$是对角元素在$[x_1, x_2]$内是单一的正负号，且与$\Delta_\lambda$有相同的正负号。更一般地说，如果$\mathbf{R}(x)$是任意连续的$n\times n$阶的$x$的正定矩阵函数，则在$[x_1, x_2]$内$\mathrm{tr}(\widetilde{\mathbf{M}}^{(2)\mathrm{T}}\Sigma\mathbf{R}\mathbf{M}^{(1)})$的正负号是不变的，且与$\Delta_\lambda$正负号一致。

定义

$$\vartheta_R(x,\lambda)=-\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left\{\frac{\mathrm{tr}(\widetilde{\mathbf{M}}^{(2)\mathrm{T}}(x_2)\Sigma\mathbf{R}(x)\mathbf{M}^{(1)}(x))}{\widetilde{m}^{(2)\mathrm{T}}(x_2)m^{(1)}(x)}\right\} \tag{4.75}$$

要求ϑ_R在$\cot^{-1}$变量奇异点上是连续的条件，分辨$\cot^{-1}$值的多值性。这种要求给定了$\vartheta_R(x,\lambda)$，它可确定到相差一个与x和λ无关的正整数。因为按假设，给定的与λ，$m^{(1)}(x_1)$，$m^{(2)}(x_2)$等无关

的边界条件有此特性，所以$\vartheta_R(x_1,\theta)$与λ无关。因而，$\vartheta_R(x,\lambda)$的定义可唯一地由下式给定。

$$0\leqslant\vartheta_R(x_1,\lambda)<\pi \tag{4.76}$$

$\vartheta_R(x,\lambda)$在其他一些点上的值能用这样的方法唯一地确定，即从$x=x_1$线上任意一点横贯(x,λ)平面上一条迹线到要求点，并使式(4.75)中分母为零的一些迹线点上连续。

函数$\vartheta_R(x,\lambda)$的可用性在于$\vartheta_R(x_2,\lambda)$是λ的一个函数的特性。当$x=x_2$，式(4.75)中的分母简单地是Δ，如上面表明的那样，当Δ为零时，分子中的正负号与$\mathrm{d}\Delta/\mathrm{d}\lambda$一致。由此得到，如果对于某一个$\lambda_0$，$\Delta(\lambda_0)$为零，则$\vartheta_R(x_2,\lambda_0)$是一个整数。比如说$k$，且对于充分小的$|\varepsilon|$，$\vartheta_R(x_2,\lambda_0+\varepsilon)$按照$\varepsilon$的符号或者大于$k$或者小于$k$，即作为$\lambda$的一个函数，$\vartheta_R(x_2,\lambda)$在$\vartheta_R$为整数的一些点上常常是增大的。因为$\vartheta_R(x_2,\lambda)$是一个整数的条件相同于$\lambda$是一个本征值条件，通过$\Delta(\lambda)=0$，得出结论：位于$\lambda_a$和$\lambda_b$($\lambda_a<\lambda_b$；$\Delta(\lambda_a)\neq0$；$\Delta(\lambda_b)\neq0$)两个值之间的本征值数目给定为

$$\gamma(\lambda_a,\lambda_b)=\mathrm{ent}(\vartheta_R(x_2,\lambda_b))-\mathrm{ent}(\vartheta_R(x_2,\lambda_a)) \tag{4.77}$$

这里$\mathrm{ent}(\vartheta)$是小于或等于ϑ的最大整数。应用在$x=x_1$点上的式(4.76)，追踪$\vartheta_R(x,\lambda)$值就能求得$\vartheta_R(x_2,\lambda_b)$和$\vartheta_R(x_2,\lambda_a)$的值，当$\lambda$固定时，$\vartheta_R(x,\lambda)$的值从$x_1$到$x_2$是随着$x$增加的。因而，式(4.77)使$\lambda_a$和$\lambda_b$之间的本征值数目能仅用微分方程的两个积分来计算。这就是本征值划界算法的理论基础，这在本章的计算机程序中执行。实际上不必要在式(4.75)中作三角计算，而只简单地计算分母的零交点，按照分子和分母导数符号的乘积，计算正负。为了简单的缘故，直到现在，一直略去考虑方程的不连续性及变化或降次。在没有这种复杂性的情况下，一个对R(x)明显选择是简单地令R=1；在简正振型问题中，这样选择R(x)，以保证在核-幔边界和海床上，$\vartheta_R(x,\lambda)$是x的一个连续函数，在那里解是不连续的，且微分方程的阶由固体中的6次变成液体中的4次。

5. 控制地球自由振荡的微分方程组

包括重力的简正振型问题，提供一些2阶(扭转振型)，4阶(径向振型，液体中的球状振型)和6阶(固体中的球型振型)微分系统的实例。在每一种情况中，这些都是自伴系统，满足真实性条件，即$-\Sigma A_i$是半正定的。这里使前面几节中的一般结论特殊化到这些特别的系统中。认为Takeuchi和Saito(1972)的文章是对简正振型的微分方程的完整处理，而认为Chapman和Woodhouse(1981)的文章是对他们的自伴形式的完整处理。

采用球坐标系(r, θ, ϕ)，角阶数l和方位阶数m的振型的弹性位移场u，用球坐标分量表示，给定为(Pekeris和Jarosch，1958；Alterman等，1959)

$$\left.\begin{aligned} u_r &= U(r)Y_l^m(\theta,\phi) \\ u_\theta &= V(r)\partial_\theta Y_l^m(\theta,\phi)+W(r)\operatorname{cosec}\theta\partial_\phi Y_l^m(\theta,\phi) \\ u_\phi &= V(r)\operatorname{cosec}\theta\partial_\phi Y_l^m(\theta,\phi)-W(r)\partial_\theta Y_l^m(\theta,\phi) \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

及重力位扰动是

$$\varphi_1 = P(r)Y_l^m(\theta,\phi) \quad (5.2)$$

这里$Y_l^m(\theta,\phi)$是球面谐函数。对于扭转振型，U，V及P恒为零；对于球状振型，$W=0$及对于径向振型，V和W都为零。每一种情况，U, V, W和P中不恒为零的函数，在r上满足微分方程系统，它们与m无关而与振荡频率ω有关；应用前面的结果，确认$x\equiv r$，$\lambda\equiv\omega^2$。用按段连续函数$A(r)$，$C(r)$，$L(r)$，$N(r)$和$F(r)$给定地球结构，这些函数与密度$\rho_0(r)$一起表征横向各向同性介质的线性弹性本构定律(Tahenchi和Saito，1972)。对于未扰动模型的平衡方程，在假设初始应力场t^0是各向同性的条件下，

$$t_{ij}^0 = -p_0(r)\delta_{ij} \quad (5.3)$$

允许初始压力$p_0(r)$和初始重力加速度$g_0(r)$由$\rho_0(r)$来确定

$$g_0(r)=\frac{4\pi G}{r^2}\int_0^r \rho_0(r')r'^2\mathrm{d}r' \tag{5.4}$$

$$p_0(r)=\int_r^a \rho_0(r')g_0(r')\mathrm{d}r' \tag{5.5}$$

这里a是地球半径，或当海洋存在时为海水表面的半径。

扭转振型

写出

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} r\zeta W \\ r\zeta L\dot{W}-\zeta W \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

这里已引入$\zeta=[l(l+1)]^{1/2}$和一小圆点代表对r的微商，得到y满足形式(1.1)的微分方程，有系统矩阵

$$\mathsf{A}=\begin{bmatrix} 2r^{-1} & L^{-1} \\ (\zeta^2-2)r^{-2}N-\omega^2\rho_0 & -2r^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

因而注意

$$\Sigma\mathsf{A}=\begin{bmatrix} (\zeta^2-2)r^{-2}N-\omega^2\rho_0 & -2r^{-1} \\ -2r^{-1} & -L^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

是对称的，且

$$-\Sigma\mathsf{A}_\lambda=\begin{bmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

是半正定的，归一化积分(4.73)是

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{y}^{\mathrm{T}}(-\Sigma\mathsf{A}_\lambda)y\,\mathrm{d}r=\int_{a_{\mathrm{cmb}}}^{a_{\mathrm{solid}}} \rho_0 l(l+1)W^2r^2\mathrm{d}r \tag{5.10}$$

这里已经确认$x_1=a_{\mathrm{cmb}}$，$x_2=a_{\mathrm{solid}}$，而a_{cmb}是核-幔边界的半径，a_{solid}是相当于海床球表面，或无海洋时相当于 自 由 表 面 的 半 径。注意$-\Sigma\mathsf{A}_\lambda$有所要求的特征，即如果对于全 部 $x\in[x_1,x_2]$，$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\Sigma\mathsf{A}_\lambda y$为零，则$y(x)\equiv 0$(式(4.72)后面的讨论)。

边界条件是在a_{cmb}和a_{solid}，应力为零：

$$y_2(x_1)=0,\quad y_2(x_2)=0 \tag{5.11}$$

因而，确认

$$\bar{\sigma}_1^{(1)}=\bar{\sigma}_2^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \tag{5.12}$$

即$\bar{V}^{(1)}$和$\bar{V}^{(2)}$是由这个矢量张成一维矢量空间。在模型的其他边界上，要求$y(x)$是连续的。

对于二阶系统，因为全部子行列式是一阶的，子行列式形式上是退化型的，这样有$m^{(1)}(x)=\mathrm{M}^{(1)}(x)=\sigma^{(1)}(x,\lambda)$和$m^{(2)}(x)=\mathrm{M}^{(2)}(x)=\sigma^{(2)}(x,\lambda)$，这里$\sigma^{(1)}$和$\sigma^{(2)}$是初值问题式(1.3)的解。

设$\mathrm{R}(x)=1$，计数变量$\vartheta_R(x,\lambda)$由式(4.75)给出，为

$$\vartheta_R(x,\lambda)=-\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left\{\frac{\sigma_2^{(1)}(x,\lambda)}{\sigma_1^{(1)}(x,\lambda)}\right\} \tag{5.13}$$

注意，结论4.2的特性也是退化的，因为$\mathrm{E}^{(2,1)}=\Sigma$，并由此$\Xi=1$和本征函数结构，式(4.74)简化到

$$\sigma^{(1)}\sigma^{(2)\mathrm{T}}=\Delta_\lambda\hat{y}\hat{y}^{\mathrm{T}} \tag{5.14}$$

当$\Delta=0$时，$\sigma^{(1)}(x,\lambda)$和$\sigma^{(2)}(x,\lambda)$相等，仅差一个常量的乘子。

径向振型

写出

$$y=\begin{bmatrix}rU\\rP\\rC\dot{U}+2FU\\(4\pi G)^{-1}(r\dot{P}+\dot{P})+\rho_0 rU\end{bmatrix} \tag{5.15}$$

这里G是万有引力常数；y满足形如式(1.1)的微分系统，有形式如下的系统矩阵：

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{T} & \mathrm{K}\\\mathrm{S} & -\mathrm{T}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \tag{5.16}$$

这里子矩阵是

$$\mathrm{T}=\begin{bmatrix}r^{-1}(1-2FC^{-1}) & 0\\-4\pi G\rho_0 & 0\end{bmatrix} \tag{5.17}$$

$$
\mathsf{S}=\begin{bmatrix} -\rho_0\omega^2+4r^{-2}(A-N-F^2C^{-1}-r\rho_0 g_0) & -r^{-1}\rho_0 \\ -r^{-1}\rho_0 & 0 \end{bmatrix}
$$

(5.18)

$$
\mathsf{K}=\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 4\pi G \end{bmatrix} \tag{5.19}
$$

注意，S和T是对称的(式(1.13))。由于这种结构，ΣA是对称的；$-\Sigma\mathsf{A}_\lambda$给定为

$$
-\Sigma\mathsf{A}_\lambda=\begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.20}
$$

由此，归一化积分为

$$
\int_{x_1}^{x_2} y^{\mathrm{T}}(-\Sigma\mathsf{A}_\lambda)y\,dr=\int_0^a \rho_0 U^2 r^2 dr \tag{5.21}
$$

这里已经确认$x_1=0$，相当于地球中心，而$x_2=a$，相当于地球模型的外自由表面的半径。采用下面子行列式矢量的“字母的”顺序：

$$
m^{(\alpha)}=\begin{pmatrix} m_{(12)} \\ m_{(13)} \\ m_{(14)} \\ m_{(23)} \\ m_{(24)} \\ m_{(34)} \end{pmatrix} \tag{5.22}
$$

用$m_1^{(\alpha)}$，$m_2^{(\alpha)}$等代替$m_{(12)}^{(\alpha)}$，$m_{(13)}^{(\alpha)}$等。得到式(2.19)的$\mathsf{E}^{(4,2)}$，是

$$E^{(4,2)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

和

$$[\Sigma:2]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

由此，式(4.22)有

$$\Xi=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

结论4.2要求$m^{(1)}$和$m^{(2)}$(对于所有的x和λ) 位于属于本征值为1的本征空间中，这等价于有关系

$$m_2^{(\alpha)}=-m_5^{(\alpha)} \tag{5.26}$$

例如，出现在式(4.74)中生成矩阵被给出为[式(2.36)，(2.38)]，

$$M^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & m_1^{(1)} & m_2^{(1)} & m_3^{(1)} \\ -m_1^{(1)} & 0 & m_4^{(1)} & m_5^{(1)} \\ -m_2^{(1)} & -m_4^{(1)} & 0 & m_6^{(1)} \\ -m_3^{(1)} & -m_5^{(1)} & -m_6^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & m_6^{(2)} & -m_5^{(2)} & m_4^{(2)} \\ -m_6^{(2)} & 0 & m_3^{(2)} & -m_2^{(2)} \\ m_5^{(2)} & -m_3^{(2)} & 0 & m_1^{(2)} \\ -m_4^{(2)} & m_2^{(2)} & -m_1^{(2)} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

因而式(4.74)可写成为

$$\Delta_{\lambda}\hat{y}\hat{y}^{\mathrm{T}}=\mathbf{X} \tag{5.29}$$

这里X的元素是

$$\left.\begin{aligned}
x_{11}&=m_1^{(1)}m_3^{(2)}-m_3^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{12}&=-m_1^{(1)}m_2^{(2)}+m_2^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{13}&=m_1^{(1)}m_6^{(2)}-m_2^{(1)}m_5^{(2)}+m_3^{(1)}m_4^{(2)}\\
x_{14}&=m_2^{(1)}m_3^{(2)}-m_3^{(1)}m_2^{(2)}\\
x_{21}&=m_1^{(1)}m_5^{(2)}-m_5^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{22}&=-m_1^{(1)}m_4^{(2)}+m_4^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{23}&=-m_4^{(1)}m_5^{(2)}+m_6^{(1)}m_4^{(2)}\\
x_{24}&=m_1^{(1)}m_6^{(2)}+m_4^{(1)}m_3^{(2)}-m_5^{(1)}m_2^{(2)}\\
x_{31}&=m_2^{(1)}m_5^{(2)}-m_4^{(1)}m_3^{(2)}-m_6^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{32}&=-m_2^{(1)}m_4^{(2)}+m_4^{(1)}m_2^{(2)}\\
x_{33}&=-m_4^{(1)}m_6^{(2)}+m_6^{(1)}m_4^{(2)}\\
x_{34}&=m_2^{(1)}m_6^{(2)}-m_6^{(1)}m_2^{(2)}\\
x_{41}&=m_3^{(1)}m_5^{(2)}-m_5^{(1)}m_3^{(2)}\\
x_{42}&=-m_3^{(1)}m_4^{(2)}+m_5^{(1)}m_2^{(2)}-m_6^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{43}&=-m_5^{(1)}m_6^{(2)}+m_6^{(1)}m_5^{(2)}\\
x_{44}&=m_3^{(1)}m_6^{(2)}-m_6^{(1)}m_3^{(2)}
\end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

及

$$\begin{aligned}\Delta=m^{(1)\mathrm{T}}\widetilde{m}^{(2)}&=m_1^{(1)}m_6^{(2)}-m_2^{(1)}m_5^{(2)}+m_3^{(1)}m_4^{(2)}\\&\quad+m_4^{(1)}m_3^{(2)}-m_5^{(1)}m_2^{(2)}+m_6^{(1)}m_1^{(2)}\end{aligned} \tag{5.31}$$

注意，用式(5.26)，当Δ为零时，式(5.30)的右边是对称的。

自由表面边界条件简单地为

$$y_3 = y_4 = 0$$

因而选择

$$\bar{\sigma}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\sigma}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

且得到

$$m^{(2)}(x_2) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

在x_1上的边界条件由这样的要求去替代，即在地心，解是有限的，它是微分系统式(5.16)的正则奇异点。实际上此条件可以用设置$\sigma_k^{(1)}(x, \lambda)$ $(k=1,2)$ 等于这样一些方程的两个独立解来满足，即这些方程在均匀地球模型情况下，在原点是正则的，也即，假设在原点的某一小邻域中，$r \in [0, r_1]$，模型是均匀的，同时，应用解的解析形式来得到$\sigma_k^{(1)}(r_1, \lambda)$ $(k=1,2)$。从这些，可以计算$m^{(1)}(r_1)$，然后将它用作子行列式方程的积分的初始值至地球表面。有关的解析解由Pekeris和Jarosch (1958) 及 Takeuchi 和 Saito (1972)给出。

因为$m^{(1)}(r_1)$不具有所假定的、与$\lambda(\equiv\omega^2)$无关的特性（见前面式(4.76)的讨论），所以在计数算法中引入复杂化。因而必须证明，计数变量$\vartheta_R(x, \lambda)$有一个恰定极限，当$x(\equiv r)$趋向于零时，它与λ无关。r_1的值必须选择得充分小，使位于区间 $(0, r_1)$ 中式(4.75)的分母没有零点，因为，不然计数就会有误差。在这里不追究这些计算的详情。附随在本章的计算机程序中，r_1的选择依赖于频率，且选r_1小于一个波长。这可被认为只不过是已找到的

“经验法则”，即经验地为了满足前面提到的要求。这些情况的详细分析尚须完成。类似的考虑应用于球状振型情况，将在下面讨论。

在式(4.75)中，再次选择R(x)=1，则计数变量成为

$$\vartheta_R(x,\lambda)=-\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left\{\frac{m_4^{(1)}(x,\lambda)-m_3^{(1)}(x,\lambda)}{m_6^{(1)}(x,\lambda)}\right\} \quad (5.32)$$

球状振荡

写出

$$y=\begin{vmatrix} rU \\ r\zeta V \\ rP \\ rC\dot{U}+F(2U-\zeta^2 V) \\ \zeta(r\dot{V}+U-V) \\ (4\pi G)^{-1}[r\dot{P}+(l+1)P]+\rho_0 rU \end{vmatrix} \quad (5.33)$$

及y满足一个具有式(5.16)形式系统矩阵的微分系统，其中

$$T=\begin{bmatrix} r^{-1}(1-2FC^{-1}) & r^{-1}FC^{-1} & 0 \\ -r^{-1}\zeta & 2r^{-1} & 0 \\ -4\pi G\rho_0 & 0 & r^{-1}l \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$S=\begin{bmatrix} -\rho_0\omega^2+4r^{-2}(\gamma-r\rho_0 g_0) & \zeta r^{-2}(r\rho_0 g_0-2\gamma) & r^{-1}\rho_0(l+1) \\ \zeta r^{-2}(r\rho_0 g_0-2\gamma) & -\rho_0\omega^2+r^{-2}[\zeta^2(\gamma+N)-2N] & r^{-1}\rho_0\zeta \\ -r^{-1}\rho_0(l+1) & r^{-1}\rho_0\zeta & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$K=\begin{bmatrix} C^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi G \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

这里$\gamma=A-N-C^{-1}F^2$。得到归一化积分变成为

$$\int_{x_1}^{x_2} y^T(-\Sigma A_\lambda)y\,dr=\int_0^a \rho_0[U^2+l(l+1)V^2]r^2 dr \quad (5.37)$$

在液体中，采用一些恒等式，六阶系统简化到四阶

$$y_5=0, \quad y_2=\zeta\omega^{-2}r^{-1}[g_0y_1-\rho_0^{-1}y_4+y_3] \tag{5.38}$$

在液体情况下写出

$$y=\begin{vmatrix} rU \\ rP \\ rC\dot{U}+F(2U-\zeta^2V) \\ (4\pi G)^{-1}[r\dot{P}+(l+1)P]+\rho_0 rU \end{vmatrix} \tag{5.39}$$

再次得到一个形如式(5.16)的系统，其中

$$\mathsf{T}=\begin{bmatrix} r^{-1}\omega^{-2}\zeta^2g_0-r^{-1} & r^{-2}\omega^{-2}\zeta^2 \\ -4\pi G\rho_0 & -r^{-1}l \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

$$\mathsf{S}=\begin{bmatrix} -\rho_0\omega^2+\rho_0g_0r^{-1}(r^{-1}\omega^{-2}\zeta^2g_0-4) & \rho_0r^{-1}(r^{-1}\omega^{-2}\zeta^2g_0-l-1) \\ \rho_0r^{-1}(r^{-1}\omega^{-2}\zeta^2g_0-l-1) & \rho_0r^{-2}\omega^{-2}\zeta^2 \end{bmatrix} \tag{5.41}$$

$$\mathsf{K}=\begin{bmatrix} C^{-1}-r^{-2}\omega^{-2}\rho_0^{-1}\zeta^2 & 0 \\ 0 & 4\pi G \end{bmatrix} \tag{5.42}$$

再次采用子行列式矢量的"字母"次序，在固体中，有

$$m^{(\alpha)}=\begin{vmatrix} m^{(\alpha)}_{(123)} \\ m^{(\alpha)}_{(124)} \\ m^{(\alpha)}_{(125)} \\ m^{(\alpha)}_{(126)} \\ m^{(\alpha)}_{(134)} \\ \vdots \\ m^{(\alpha)}_{(456)} \end{vmatrix} \tag{5.43}$$

它具有二十维。将$m^{(\alpha)}$的元素写成$m^{(\alpha)}_1, \cdots, m^{(\alpha)}_{20}$。矩阵Ξ((4.22)，$n=6$，$p=3$)有非零元素

$$
\left.\begin{aligned}
&\xi_{1,1}=\xi_{4,4}=\xi_{6,6}=\xi_{10,10}=1\\
&\xi_{11,11}=\xi_{15,15}=\xi_{17,17}=\xi_{20,20}=1\\
&\xi_{2,13}=\xi_{13,2}=\xi_{8,19}=\xi_{19,8}=1\\
&\xi_{3,7}=\xi_{7,3}=\xi_{5,12}=\xi_{12,5}=-1\\
&\xi_{9,16}=\xi_{16,9}=\xi_{14,18}=\xi_{18,14}=-1
\end{aligned}\right\}\tag{5.44}
$$

因而结论4.2要求

$$
\left.\begin{aligned}
&m_2^{(\alpha)}=m_{13}^{(\alpha)},\quad m_8^{(\alpha)}=m_{19}^{(\alpha)},\quad m_3^{(\alpha)}=-m_7^{(\alpha)}\\
&m_5^{(\alpha)}=-m_{12}^{(\alpha)},\quad m_9^{(\alpha)}=-m_{16}^{(\alpha)},\quad m_{14}^{(\alpha)}=-m_{18}^{(\alpha)}
\end{aligned}\right\}\tag{5.45}
$$

将$m^{(\alpha)}$的独立元素数从20降低到14。(W^+的维数见结论 4.2)。方程式(4.74)被用来构成本征函数，可用式(5.29)形式写出，其中X的元素为：

$$
\left.\begin{aligned}
x_{11}=&m_1^{(1)}m_{10}^{(2)}-m_3^{(1)}m_7^{(2)}+m_4^{(1)}m_6^{(2)}+m_6^{(1)}m_4^{(2)}\\
&-m_7^{(1)}m_3^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{12}=&-m_1^{(1)}m_9^{(2)}+m_2^{(1)}m_7^{(2)}-m_4^{(1)}m_5^{(2)}-m_5^{(1)}m_4^{(2)}\\
&+m_7^{(1)}m_2^{(2)}-m_9^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{13}=&m_1^{(1)}m_8^{(2)}-m_2^{(1)}m_6^{(2)}+m_3^{(1)}m_5^{(2)}+m_5^{(1)}m_3^{(2)}\\
&-m_6^{(1)}m_2^{(2)}+m_8^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{14}=&m_1^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_2^{(1)}m_{19}^{(2)}+m_3^{(1)}m_{18}^{(2)}-m_4^{(1)}m_{17}^{(2)}\\
&+m_5^{(1)}m_{16}^{(2)}-m_6^{(1)}m_{15}^{(2)}+m_7^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_8^{(1)}m_{13}^{(2)}\\
&-m_9^{(1)}m_{12}^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_{11}^{(2)}\\
x_{15}=&-m_5^{(1)}m_{10}^{(2)}+m_9^{(1)}m_6^{(2)}-m_8^{(1)}m_7^{(2)}-m_7^{(1)}m_8^{(2)}\\
&+m_6^{(1)}m_9^{(2)}-m_{10}^{(1)}m_5^{(2)}\\
x_{16}=&m_2^{(1)}m_{10}^{(2)}-m_3^{(1)}m_9^{(2)}+m_4^{(1)}m_8^{(2)}+m_8^{(1)}m_4^{(2)}\\
&-m_9^{(1)}m_3^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_2^{(2)}\\
x_{21}=&m_1^{(1)}m_{16}^{(2)}-m_3^{(1)}m_{13}^{(2)}+m_4^{(1)}m_{12}^{(2)}+m_{12}^{(1)}m_4^{(2)}\\
&-m_{13}^{(1)}m_3^{(2)}+m_{16}^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{22}=&-m_1^{(1)}m_{15}^{(2)}+m_2^{(1)}m_{13}^{(2)}-m_4^{(1)}m_{11}^{(2)}-m_{11}^{(1)}m_4^{(2)}\\
&+m_{13}^{(1)}m_2^{(2)}-m_{15}^{(1)}m_1^{(2)}\\
x_{23}=&m_1^{(1)}m_{14}^{(2)}-m_2^{(1)}m_{12}^{(2)}+m_3^{(1)}m_{11}^{(2)}+m_{11}^{(1)}m_3^{(2)}
\end{aligned}\right|\tag{5.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&-m_{12}^{(1)} m_2^{(2)} + m_{14}^{(1)} m_1^{(2)} \\
x_{24} &= m_{11}^{(1)} m_{16}^{(2)} - m_{12}^{(1)} m_{15}^{(2)} + m_{13}^{(1)} m_{14}^{(2)} + m_{14}^{(1)} m_{13}^{(2)} \\
&\quad - m_{15}^{(1)} m_{12}^{(2)} + m_{16}^{(1)} m_{11}^{(2)} \\
x_{25} &= m_1^{(1)} m_{20}^{(2)} - m_2^{(1)} m_{19}^{(2)} + m_3^{(1)} m_{18}^{(2)} - m_4^{(1)} m_{17}^{(2)} \\
&\quad - m_{11}^{(1)} m_{10}^{(2)} + m_{12}^{(1)} m_9^{(2)} - m_{13}^{(1)} m_8^{(2)} - m_{14}^{(1)} m_7^{(2)} \\
&\quad + m_{15}^{(1)} m_6^{(2)} - m_{16}^{(1)} m_5^{(2)} \\
x_{26} &= m_2^{(1)} m_{16}^{(2)} - m_3^{(1)} m_{15}^{(2)} + m_4^{(1)} m_{14}^{(2)} + m_{14}^{(1)} m_4^{(2)} \\
&\quad - m_{15}^{(1)} m_3^{(2)} + m_{16}^{(1)} m_2^{(2)} \\
x_{31} &= m_1^{(1)} m_{19}^{(2)} - m_6^{(1)} m_{13}^{(2)} + m_7^{(1)} m_{12}^{(2)} + m_{12}^{(1)} m_7^{(2)} \\
&\quad - m_{13}^{(1)} m_6^{(2)} + m_{19}^{(1)} m_1^{(2)} \\
x_{32} &= -m_1^{(1)} m_{18}^{(2)} + m_5^{(1)} m_{13}^{(2)} - m_7^{(1)} m_{11}^{(2)} - m_{11}^{(1)} m_7^{(2)} \\
&\quad + m_{13}^{(1)} m_5^{(2)} - m_{18}^{(1)} m_1^{(2)} \\
x_{33} &= m_1^{(1)} m_{17}^{(2)} - m_5^{(1)} m_{12}^{(2)} + m_6^{(1)} m_{11}^{(2)} + m_{11}^{(1)} m_6^{(2)} \\
&\quad - m_{12}^{(1)} m_5^{(2)} + m_{17}^{(1)} m_1^{(2)} \\
x_{34} &= m_{11}^{(1)} m_{19}^{(2)} - m_{12}^{(1)} m_{18}^{(2)} + m_{13}^{(1)} m_{17}^{(2)} + m_{17}^{(1)} m_{13}^{(2)} \\
&\quad - m_{18}^{(1)} m_{12}^{(2)} + m_{19}^{(1)} m_{11}^{(2)} \\
x_{35} &= -m_5^{(1)} m_{19}^{(2)} + m_6^{(1)} m_{18}^{(2)} - m_7^{(1)} m_{17}^{(2)} - m_{17}^{(1)} m_7^{(2)} \\
&\quad + m_{18}^{(1)} m_6^{(2)} - m_{19}^{(1)} m_5^{(2)} \\
x_{36} &= m_1^{(1)} m_{20}^{(2)} + m_5^{(1)} m_{16}^{(2)} - m_6^{(1)} m_{15}^{(2)} - m_7^{(1)} m_{14}^{(2)} \\
&\quad - m_{11}^{(1)} m_{10}^{(2)} + m_{12}^{(1)} m_9^{(2)} - m_{13}^{(1)} m_8^{(2)} - m_{17}^{(1)} m_4^{(2)} \\
&\quad - m_{18}^{(1)} m_3^{(2)} + m_{19}^{(1)} m_2^{(2)} \\
x_{41} &= m_2^{(1)} m_{19}^{(2)} - m_5^{(1)} m_{16}^{(2)} - m_8^{(1)} m_{13}^{(2)} + m_9^{(1)} m_{12}^{(2)} \\
&\quad + m_{11}^{(1)} m_{10}^{(2)} + m_{14}^{(1)} m_7^{(2)} - m_{15}^{(1)} m_6^{(2)} - m_{17}^{(1)} m_4^{(2)} \\
&\quad + m_{18}^{(1)} m_3^{(2)} + m_{20}^{(1)} m_1^{(2)} \\
x_{42} &= -m_2^{(1)} m_{16}^{(2)} + m_5^{(1)} m_{15}^{(2)} - m_9^{(1)} m_{11}^{(2)} - m_{11}^{(1)} m_9^{(2)} \\
&\quad + m_{15}^{(1)} m_5^{(2)} - m_{16}^{(1)} m_2^{(2)} \\
x_{43} &= m_2^{(1)} m_{17}^{(2)} - m_5^{(1)} m_{14}^{(2)} + m_8^{(1)} m_{11}^{(2)} + m_{11}^{(1)} m_8^{(2)} \\
&\quad - m_{14}^{(1)} m_5^{(2)} + m_{17}^{(1)} m_2^{(2)}
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
x_{44}= & m_{11}^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_{14}^{(1)}m_{18}^{(2)}+m_{15}^{(1)}m_{17}^{(2)}+m_{17}^{(1)}m_{15}^{(2)} \\
& -m_{18}^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_{11}^{(2)} \\
x_{45}= & -m_{5}^{(1)}m_{20}^{(2)}+m_{8}^{(1)}m_{18}^{(2)}-m_{9}^{(1)}m_{17}^{(2)}-m_{17}^{(1)}m_{9}^{(2)} \\
& +m_{18}^{(1)}m_{8}^{(2)}-m_{20}^{(1)}m_{5}^{(2)} \\
x_{46}= & m_{2}^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_{8}^{(1)}m_{15}^{(2)}+m_{9}^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_{14}^{(1)}m_{9}^{(2)} \\
& -m_{15}^{(1)}m_{8}^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_{2}^{(2)} \\
x_{51}= & m_{3}^{(1)}m_{19}^{(2)}-m_{6}^{(1)}m_{16}^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_{12}^{(2)}+m_{12}^{(1)}m_{10}^{(2)} \\
& -m_{16}^{(1)}m_{6}^{(2)}+m_{19}^{(1)}m_{3}^{(2)} \\
x_{52}= & -m_{3}^{(1)}m_{18}^{(2)}+m_{6}^{(1)}m_{15}^{(2)}-m_{8}^{(1)}m_{13}^{(2)}-m_{10}^{(1)}m_{11}^{(2)} \\
& -m_{12}^{(1)}m_{9}^{(2)}+m_{14}^{(1)}m_{7}^{(2)}+m_{16}^{(1)}m_{5}^{(2)}-m_{17}^{(1)}m_{4}^{(2)} \\
& -m_{19}^{(1)}m_{2}^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_{1}^{(2)} \\
x_{53}= & m_{3}^{(1)}m_{17}^{(2)}-m_{6}^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_{8}^{(1)}m_{12}^{(2)}+m_{12}^{(1)}m_{8}^{(2)} \\
& -m_{14}^{(1)}m_{6}^{(2)}+m_{17}^{(1)}m_{3}^{(2)} \\
x_{54}= & m_{12}^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_{14}^{(1)}m_{19}^{(2)}+m_{16}^{(1)}m_{17}^{(2)}+m_{17}^{(1)}m_{16}^{(2)} \\
& -m_{19}^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_{12}^{(2)} \\
x_{55}= & -m_{6}^{(1)}m_{20}^{(2)}+m_{8}^{(1)}m_{19}^{(2)}-m_{10}^{(1)}m_{17}^{(2)}-m_{17}^{(1)}m_{10}^{(2)} \\
& +m_{19}^{(1)}m_{8}^{(2)}-m_{20}^{(1)}m_{6}^{(2)} \\
x_{56}= & m_{3}^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_{8}^{(1)}m_{16}^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_{14}^{(1)}m_{10}^{(2)} \\
& -m_{16}^{(1)}m_{8}^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_{3}^{(2)} \\
x_{61}= & m_{4}^{(1)}m_{19}^{(2)}-m_{7}^{(1)}m_{16}^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_{13}^{(2)}+m_{13}^{(1)}m_{10}^{(2)} \\
& -m_{16}^{(1)}m_{7}^{(2)}+m_{19}^{(1)}m_{4}^{(2)} \\
x_{62}= & -m_{4}^{(1)}m_{18}^{(2)}+m_{7}^{(1)}m_{15}^{(2)}-m_{9}^{(1)}m_{13}^{(2)}-m_{13}^{(1)}m_{9}^{(2)} \\
& +m_{15}^{(1)}m_{7}^{(2)}-m_{18}^{(1)}m_{4}^{(2)} \\
x_{63}= & m_{4}^{(1)}m_{17}^{(2)}-m_{7}^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_{9}^{(1)}m_{12}^{(2)}-m_{10}^{(1)}m_{11}^{(2)} \\
& +m_{13}^{(1)}m_{8}^{(2)}-m_{15}^{(1)}m_{6}^{(2)}+m_{16}^{(1)}m_{5}^{(2)}+m_{18}^{(1)}m_{3}^{(2)} \\
& -m_{19}^{(1)}m_{2}^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_{1}^{(2)} \\
x_{64}= & m_{13}^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_{15}^{(1)}m_{19}^{(2)}+m_{16}^{(1)}m_{18}^{(2)}+m_{18}^{(1)}m_{16}^{(2)} \\
& -m_{19}^{(1)}m_{15}^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_{13}^{(2)} \\
x_{65}= & -m_{7}^{(1)}m_{20}^{(2)}+m_{9}^{(1)}m_{19}^{(2)}-m_{10}^{(1)}m_{18}^{(2)}-m_{18}^{(1)}m_{10}^{(2)}
\end{aligned}
\right| \quad (5.46)
$$

$$+m_{19}^{(1)}m_9^{(2)}-m_{20}^{(1)}m_7^{(2)}$$

$$x_{66}=m_4^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_9^{(1)}m_{16}^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_{15}^{(2)}+m_{15}^{(1)}m_{10}^{(2)}$$
$$-m_{16}^{(1)}m_9^{(2)}+m_{20}^{(1)}m_4^{(2)}$$

和

$$\begin{aligned}\Delta=&m_1^{(1)}m_{20}^{(2)}-m_2^{(1)}m_{19}^{(2)}+m_3^{(1)}m_{18}^{(2)}-m_4^{(1)}m_{17}^{(2)}+m_5^{(1)}m_{16}^{(2)}\\&-m_6^{(1)}m_{15}^{(2)}+m_7^{(1)}m_{14}^{(2)}+m_8^{(1)}m_{13}^{(2)}-m_9^{(1)}m_{12}^{(2)}+m_{10}^{(1)}m_{11}^{(2)}\\&-m_{11}^{(1)}m_{10}^{(2)}+m_{12}^{(1)}m_9^{(2)}-m_{13}^{(1)}m_8^{(2)}-m_{14}^{(1)}m_7^{(2)}+m_{15}^{(1)}m_6^{(2)}\\&-m_{16}^{(1)}m_5^{(2)}+m_{17}^{(1)}m_4^{(2)}-m_{18}^{(1)}m_3^{(2)}+m_{19}^{(1)}m_2^{(2)}-m_{20}^{(1)}m_1^{(2)}\end{aligned}\tag{5.47}$$

可清楚地校验，用式(5.45)，当Δ为零时，象前面理论结论（例如结论4.3)所要求的那样，X是对称的。

在模型的液体区域中，四阶系统导致到象上面对径向振型给出的那样(式(5.22)—(5.31))的本征函数的同样结构。为确定它，液体一侧的这些子行列式m_1^F，…，m_6^F，从液体通过固体时，如何变换成固体一侧的m_1^S,…,m_{20}^S，必须对内部液-固边界给出特殊的考虑；类似地，从固体通过到液体，也必须求出用m_1^S,…,m_{20}^S给出m_1^F,…,m_6^F的规则。

假设子行列式微分方程通过液体区域进行积分，并考虑一个液-固边界。在液体一侧，子行列式矢量m^F表征了一个二维子空间，假设它被矢量y_1^F和y_2^F张成：

$$y_1^F=\begin{vmatrix}y_{11}^F\\y_{21}^F\\y_{31}^F\\y_{41}^F\end{vmatrix},\qquad y_2^F=\begin{vmatrix}y_{12}^F\\y_{22}^F\\y_{32}^F\\y_{42}^F\end{vmatrix}\tag{5.48}$$

在固体一侧，径向位移、径向应力，重力位等连续性，这要求相应的解是矢量的线性组合。

$$y_1^S = \begin{bmatrix} y_{11}^F \\ 0 \\ y_{21}^F \\ y_{31}^F \\ 0 \\ y_{41}^F \end{bmatrix}; \quad y_2^S = \begin{bmatrix} y_{12}^F \\ 0 \\ y_{22}^F \\ y_{32}^F \\ 0 \\ y_{42}^F \end{bmatrix}, \quad y_3^S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这里最后的一个矢量必须适合切向位移的未知不连续性。根据边界上切向应力为零的条件，这些矢量的第五个元素都为零。固体一侧的子行列式矢量，被确定到相差一乘积因子 α，它能从这三个矢量来计算：

$$m_1^S = \det\begin{bmatrix} y_{11}^F & y_{12}^F & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y_{21}^F & y_{22}^F & 0 \end{bmatrix} = \alpha(y_{12}^F y_{21}^F - y_{22}^F y_{11}^F) = -\alpha m_1^F$$

$$\vdots$$

因子α是不重要的，但有一点，它必须与从固体通过到液体的相应的因子用这样的方法一起选择，即在液体和固体中本征函数的结构得出的解，在边界上满足正确连续性条件。随意地选择 $\alpha = -1$，完全的一组条件是

$$\left.\begin{aligned} m_1^S = m_1^F, \quad m_{11}^S = -m_4^F \\ m_2^S = m_2^F, \quad m_{13}^S = -m_5^F \\ m_4^S = m_3^F, \quad m_{15}^S = -m_6^F \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

其他全都为零。

接着假设，子行列式微分方程是通过固体区域进行积分并假设所考虑的是液体-固体边界。在固体一侧，子行列式矢量 m^S 表征了一个三维子空间，假设，由矢量y_1^S，y_2^S和y_3^S张成。可允许的解位于该三维空间的子空间内，其切向分量为零（即第五个分量为零）；一般说来，这个子空间是二维的。设$y_{53}^S \neq 0$，在液体一侧，对于可允许的解的二维子空间的一个基给定为

$$
y_1^F = \begin{pmatrix} y_{52}^S y_{11}^S - y_{51}^S y_{12}^S \\ y_{52}^S y_{31}^S - y_{51}^S y_{32}^S \\ y_{52}^S y_{41}^S - y_{51}^S y_{42}^S \\ y_{52}^S y_{61}^S - y_{51}^S y_{62}^S \end{pmatrix}, \quad y_1^F = \begin{pmatrix} y_{53}^S y_{11}^S - y_{51}^S y_{13}^S \\ y_{53}^S y_{31}^S - y_{51}^S y_{33}^S \\ y_{53}^S y_{41}^S - y_{51}^S y_{43}^S \\ y_{53}^S y_{61}^S - y_{51}^S y_{63}^S \end{pmatrix} \tag{5.51}
$$

由这两个矢量张成的子空间中的子行列式矢量的直接计算得到(略去综合因子 $-y_{51}^S$，这是不重要的)：

$$
m^F = \begin{pmatrix} -m_6^S \\ -m_8^S \\ m_{10}^S \\ -m_{17}^S \\ m_{19}^S \\ m_{20}^S \end{pmatrix} \tag{5.52}
$$

这给出了通过固体到液体中所需的交换。这也可从应用结论3.1($n=6, p=3, q=5, s=2$)而得到，其中 $V^{(1)}$ 相当于由 m^S 表征的空间，而 $V^{(2)}$ 相当于第五个元素为零的矢量空间。求得，二维空间 $V^{(1)}\cap V^{(2)}$ 是简单地比例于 $M^{(1)(2,1)}$ 的第五列，这根据略去用组合 (i_1, i_2) 所标记的元素，其中有2个或5个，得到式(5.52)结论。

在自由表面上的边界条件要求应力为零，及一个重力位扰动，这个扰动当 r 趋向于无限远时趋于零，如果模型包括海洋，则在海洋表面的这些条件导致出具有一个非零元素的六维子行列式矢量 $m^{(2)}(x_2)$，不失一般性，这个非零元素可取为1，即 $m_1^{(2)}(x_2)=1$。如果模型中没有海洋，则在自由表面的二十维子行列式矢量再次只具有一个单独的非零元素 $m_1^{(2)}(x_2)=1$。象在上面讨论过的径向振型情况，在地球中心的边界条件是，子行列式矢量是在原点为非奇异的一组解张成的子空间的子行列式矢量(Takeuchi和Saito, 1972)。当然，由这个边界条件所取的精确形式，与模型有没有一个固体内核有关。

在固体区域，取

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{5.53}$$

在式(4.75)，给出了计数变量

$$\vartheta_R(x,\lambda)=-\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left\{\frac{m_{15}^{(1)}(x,\lambda)-m_{10}^{(1)}(x,\lambda)}{m_{20}^{(1)}(x,\lambda)}\right\} \tag{5.54}$$

在液体区域，用R＝1，并得到

$$\vartheta_R(x,\lambda)=-\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\left\{\frac{m_{4}^{(1)}(x,\lambda)-m_{3}^{(1)}(x,\lambda)}{m_{6}^{(1)}(x,\lambda)}\right\} \tag{5.55}$$

6. 程序说明

附随本书的计算机程序取名为OBANI (omega-bound-anisotropic)（ω限定为各向异性）。现简略叙述球状振型情况的程序执行。目的是在一般条件下，叙述如何应用本章前面几节的理论结果，用球状振型作为一个例子，对要进行各种运算的子程序给予一定的叙述。关于程序的更详细的注释已包含在与程序一起提供的说明和执行须知中。如上面提到的，许多子程序来自Freeman Gilbert的EOS程序；在这些程序中，没有修改或仅有少许修改的有DG,STARTL,SPS,SAS,FPS,BFS,STEPS和BAYLIS，为了包括横向各向同性及使用与频率有关的模型，已由Adam Dziewonski对EOS程序作了修改，随后，将这些修改程序并入OBANI程序中。这样修改过的或创造的子程序包括MODEL和QCORR。这里提出的稍早版次的OBANI程序已由Guy Masters进行了修改且已重新命名为MINEOS(子行列式为EOS)。这一版次包括对求根过程的一些改进，还应用于本征函数的不同结构。

程序由读入地球模型开始(子程序MODEL)，计算 $g_0(r)$)由MODEL 调用子程序 DG) 及对变阶变步长的 Runge-Kutta 算 法(STEPS子程序，见Gilbert和Backus，1969)设定必须的参数。然后调用子程序 WBOUND，此子程序保持控制一个给定运行的其余部分。WBOUND 进行迭代运算，在一个给定的区间内，对每一个本征频率确立迭代的上限和下限。在进行这个过程时，它重复调用子程序DETQC (WIN，KOUNT，DET，ID，IFEIF)，这个子程序确定给定频率的特征行列式 $\Delta=\mathrm{DET}\times 2^{ID}$ 及可任意选择也可反复计算变量 KOUNT 的值，它取一个等于频率刚好低于给定量 $\omega=\mathrm{WIN}$ 的振型的倍音值。如果 IFEIF≠0，则计算本征值，这种选择仅当 WIN 是在给定的允许量范围内的一个本 征 频率时才适合。

WBOUND以读入输入数据文件(设备号 5)来确定所要 求 的角阶数 l 和要求确定本征频率中的频率范围 $[\omega_{\min},\omega_{\max}]$。如果近似本征频率或本征频率的界限已知(如由预先的运行)，则这些极限之间的频率值也可在输入文件中给定，使得更快地收敛。对每一个输入频率调用 DETQC 之后，及特别对 $\mathrm{WIN}=\omega_{\min}$(KOUNT $=n_{\min}$) 和 $\mathrm{WIN}=\omega_{\max}$ (KOUNT $=n_{\max}$)，WBOUND 继续，平分法求得一系列的 ω 值，从而得到在 $n_{\min}$ 和 $n_{\max}$ 之间的KOUNT 的全部整数值。这些足以对给定区间 $[\omega_{\min},\ \omega_{\max}]$ 内的全部本征值分类。此后，计数算法不再需要，且 WBOUND 进入提炼分过类的根的振型，基于平分法及线性内插的简单而可靠的方法，用来得到 ω 的不同的上、下限，它们都小于给定的 ω 容许量，且在上、下限内，特征行列式 $\Delta(\omega)$ 改变正负号。

DETQC 进行子行列式微分方程的积分，首先以 r 增加的方向从地球中心到自由表面，得到 $m^{(1)}(x)$ 和 使 特 征 行 列 式 $\Delta=\bar{m}^{(2)\mathrm{T}}(x_2)m^{(1)}(x_2)$ 与计数变量 $\vartheta_K(x_2,\lambda)$ 一起被确定。如果要求本征函数，则以相反方向对子行列式方程积分，得到 $m^{(2)}(x)$；从 $m^{(1)}(x)$ 和 $m^{(2)}(x)$，由式(5.30)和(5.47) 给出的并矢(子程序DECOD)分

解，构成本征函数（见固体层中这些并矢构成的子程序SPRPMA，而液体层中为FPROPM）。由DETQC调用子程序SPRPMA和FPROPM来执行子行列式微分方程的 Runge-Kutta 积分；由SPRPMA和FPROPM调用辅助子程序DERMS和DERMF来计算固体层和液体层的解的导数，它们分别在 Runge-Kutta方法要求的每一个值的计算中。DETQC也调用子程序SFBM和FSBM来变换通过固体层到液体层（SFBM，式(5.52)）或从液体层到固体层（FSBM，式(5.50)）的子行列式矢量。

DETQC在固体层调用SPSM或在液体层调用 FPSM 确定向上积分开始解。这些依次调用子程序SPS（它调用SAS来得到用球Bessel函数表示的解）和FPS，它们计算均匀固体球或液体球的各组线性独立解，不是用幂级数就是用球Bessel函数（子程序BFS）表示，它们与频率值、半径等有关。虽然原则上积分应当从地心开始，但解在一给定水平位置以下指数地衰减的情况中，以模型中较高水平位置开始积分，能省下大量时间。一个适合的开始水平位置由DETQC调用子程序STARTL确定，它检验解的最小衰减速率来确定一个水平位置，在这个位置以下开始解的值对给定的精度来说为非实质性的（由EPS值确定的那样）。

当WBOUND断定，对给定的精度下已求得一个本征频率时，再次调用DETQC来计算本征函数。在转出DETQC处，本征函数$y(x)$被确定到对每一个半径只差一个符号。EIFOUT被调用来确定符号，这个符号是按这样一个方法选取的，即在所有成对的相邻节点之间，样条内插过的本征函数是最大地光滑的，且这本征函数还被重新格式化来给出$U(r)$，$\dot{U}(r)$，$V(r)$，$\dot{V}(r)$，$P(r)$和$\dot{P}(r)$。此外，Gauss-Legendre积分（子程序GAUSLV）被用来计算归一化积分，校验Rayleigh商和确定群速度及衰减Q。被积函数由辅助程序INTGDS计算。

第三章 变 分 法

R. Buland

（美国地质调查所）

1. Rayleigh原理

在Lord Rayleigh的里程碑著作The Theory of Sound（声学原理）(1877)中，他广泛地研究了承受小振动（简谐运动）的力学系统的特性。作为该著作的一部分，Rayleigh发展Hamilton原理的一个特殊情况，现称为Rayleigh原理，它能被写成

$$\delta\int_V L(s)\,\mathrm{d}V=\delta\left[\omega^2\int_V K(s)\,\mathrm{d}V-\int_V U(s)\,\mathrm{d}V\right]=0 \quad (1)$$

这里 L 是一个保守系统的Lagrange密度，ω 是本征频率，K 是动能密度，U是位能密度，s是空间本征函数，$\mathrm{d}V$是体积元，V是固定体积和δ的意思是相对于s的变分。就是说，系统的本征频率，对于它们各自的本征函数的小变化是定常的。注意，Rayleigh原理仅包含空间中的变化。时间因素由于简谐运动的假设已被略去。式(1)的有用的变化形式可由设置ω等于零而推得。用这种方法，可以得到非均匀的稳态解，即它既与任意的边界条件相容，也与内部等效体积力的给定分布相容。

Rayleigh 原理有两个重要的数值应用。首先，如果介质的模型被扰动，则对本征频率的扰动精确到一阶，可由如下得到

$$2\omega\delta\omega\int_V m(x)\widetilde{K}(s,\ s)\,\mathrm{d}V=-\int_V \delta m(x)[\omega^2\widetilde{K}(s,s)$$

$$-\tilde{U}(s,s)]\mathrm{d}V$$

$$=-\int_V \delta m(x)\tilde{L}(s,s)\mathrm{d}V \qquad (2)$$

这里$\delta\omega$是本征函数的扰动，m是模型，δm是模型的扰动，x是位置，$m\tilde{K}=K$，$m\tilde{U}=U$和$m\tilde{L}=L$，$\tilde{K}$，$\tilde{U}$和$\tilde{L}$往往称为“核”。符号$\tilde{K}(s,s)$强调核函数对于本征函数是二次的，$-\tilde{L}$比例于本征频率对模型的 Frechét 导数。注意，作为 Rayleigh 原理的结果，核函数仅与未扰动的本征函数有关。

第二个应用包括用给定的模型和近似本征函数从能量平衡方程来计算本征频率

$$\hat{\omega}^2\int_V K(f)\mathrm{d}V-\int_V U(f)\mathrm{d}V=0 \qquad (3)$$

这里$\hat{\omega}$是对ω的近似，f是近似本征函数(Mathews和Walker, 1965, pp.319—320)。从 Rayleigh 原理知，如果$|s-f|$是$O(e)$，则$\omega^2\approx\hat{\omega}^2-O(e^2)<\hat{\omega}^2$。就是说，在计算本征频率中，误差比本征函数的近似更高阶，且本征频率的计算将严格地是上限（假设的通常情况是定常点，相当于 Lagrange 算子为一个极小值）。

2. Rayleigh-Ritz 算法

式(3)的实际应用，受这样事实所限制，即选择和精制f，一般说来，既花力气也花时间，并要求对问题有相当的见解(Jeffreys 和 Jeffreys，1966，pp.302—304)。从观测方程式(1)要求的本征函数，使得

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\omega^2\int_V K(s)\mathrm{d}V-\int_V U(s)\mathrm{d}V\right]=0 \qquad (4)$$

能推得一个更有力的不同方法。

选择

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}a_i\gamma_i(x) \qquad (5)$$

这里a_i是未知系数，γ_i是已知的线性独立函数，使得所有可能的线性组合满足解式(4)所要求的边界条件（Morse和Feshbach, 1953, pp.1117—1119）。将式(5)代入式(4)，并令对a_i的导数为零满足极值条件，得到

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left[\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_k a_j\left\{\int_V m(x)\widetilde{U}(\gamma_k,\gamma_j)\mathrm{d}V - \hat{\omega}^2\int_V m(x)\widetilde{K}(\gamma_k,\gamma_j)\mathrm{d}V\right\}\right]$$

$$=2\sum_{j=1}^{N} a_j\{\mathscr{U}_{ij}-\hat{\omega}^2\mathscr{K}_{ij}\}=0 \quad i=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

这里，$\mathscr{U}_{ij}=\mathscr{U}_{ji}=\frac{1}{2}(\widetilde{\mathscr{U}}_{ij}+\widetilde{\mathscr{U}}_{ji})$，$\mathscr{K}_{ij}=\mathscr{K}_{ji}=\frac{1}{2}(\widetilde{\mathscr{K}}_{ij}+\widetilde{\mathscr{K}}_{ji})$和

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{\mathscr{U}}_{ij}&=\int_V m(x)\widetilde{U}(\gamma_i,\gamma_j)\mathrm{d}V\\ \widetilde{\mathscr{K}}_{ij}&=\int_V m(x)\widetilde{K}(\gamma_i,\gamma_j)\mathrm{d}V\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这种明显的对称性，必定使得元素分别为$\mathscr{U}_{ij}$和$\mathscr{K}_{ij}$的矩阵$\mathscr{U}$和$\mathscr{K}$为Hermit型的。虽然产生$\widetilde{\mathscr{U}}_{ij}\neq\widetilde{\mathscr{U}}_{ji}$可能并不明显，但对于位能的某些项却十分普遍。当$k\neq i$，式(6)中的因子2由该两项产生。当$k=i$，因子2由$a_i^2$对于$a_i$的微商产生。用矩阵符号重写式(6)，得

$$(\vec{\mathscr{U}}-\hat{\omega}^2\vec{\mathscr{K}})\mathbf{a}^{\mathrm{T}}=0 \tag{8}$$

这里T是转置的意思。方程式(5)和(8)定义了Rayleigh-Ritz算法，这种算法提供同时精制一组本征函数及计算它们相应的本征频率的方法。

方程式(8)恰是一个广义的代数本征值问题。在这内容里，"广义"简单的意思为本征值问题而不是标准形式(即，$\vec{\mathscr{K}}\neq\vec{\mathscr{I}}$，$\vec{\mathscr{I}}$是单位矩阵)。从工程文献中借用记号，$\vec{\mathscr{U}}$和$\vec{\mathscr{K}}$将分别称为刚度矩阵和质量矩阵。由于位能核和动能核的二次性质，刚度矩阵和质量矩阵保证是半正定的(且往往是严格地正定的)。因而式(8)给出的系统是Hermit型的，且本征值和本征矢量是实的。因为式(1)仅对保守系统有效时，这正是所期待的。如果D(s)=0是由

式(1)用 Lagrange 方程推得的微分算子(Goldstein, 1950, pp.14—18),则式(8)的 Hermite性质包含D(s), 它也是Hermite型的(不相同但当然有相关的意思)。

用 a 乘式(8)的左边,并重新排列各项,得

$$\hat{\omega}^2=\frac{\mathbf{a}\overrightarrow{\mathscr{U}}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{a}\overrightarrow{\mathscr{K}}\mathbf{a}^{\mathrm{T}}} \tag{9}$$

这类似于式(3)提供一个方法,使得给定的本征值高精度计算变成为对正确的本征矢量的一个近似。当然,方程式(9)正是线性代数中熟知的 Rayleigh 商(Jeffreys 和 Jeffreys, 1966, pp.143—144)。

2.1 Rayleigh-Ritz解的性质

一般说来,式(1)可重写为

$$\delta\left[\int_V\{\omega^2K(s)-U(s)\}dV\right]=\delta\int_V \mathrm{D}(s)s\,dV=0 \tag{10}$$

这里D(s)已经是关于时间的 Fourier 变换。将式(5)代入式(10),并将变分理解为关于a_i的微分(一些运算之后),得

$$\int_V \mathrm{D}(f)\gamma_i dV=0 \qquad i=1,2,\cdots,N \tag{11}$$

即,作用在近似本征函数上的微分算子,在范数 $(u,v)\equiv\int_V u(x)v(x)dV$ 条件下,产生一个正交于全部基函数的空间误差。换句话说,近似解恰是真实解在基函数γ_i张成的 Hilbert 空间(以这个范数)上的投影。这表明近似本征函数是 Hilbert 空间的元素,而这Hilbert 空间是由尽可能接近真实解的基函数张成。

式(8)的N个本征矢量原来是(在全部合理的情况下)给出近似N个最光滑(最低波数)本征函数的N个基函数的线性组合。相应的N个本征值是最先的N个修正过的本征频率的上限。本征频率的计算精度与由基函数线性组合来代表相应本征函数的能力有关。当它们的波数增加时,本征函数相继地变得更难用一个基函

数的固定数来近似，且相应的本征频率计算相继地也变得更差。实际上，这意思是仅 $R \leqslant N$ 个最光滑的本征函数以足够的精度给予估算。对于多数问题，随波数的增加而本征频率增加。这意味着 $N-R$ 个本征频率的上限，它们对应用是不够精确的，保证是在要研究的频率带之上。然而，在某些问题中，本征频率随波数增加而减少，这意思是 $N-R$ 个最高波数本征函数相应于 $N-R$ 个最低本征频率。如果这些本征频率的上限被相当差地计算，则有可能这种计算"污染"了所研究的本征谱(频率带)。即一个不是所要研究的本征频率的非常差的计算，可能落在两个要研究的本征频率的计算值之间。

Rayleigh-Ritz法的一个很大的缺点是十分困难估算已算出的本征频率和本征函数的精度。在某些情况中，有可能推出另一个变分原理，其解是极大值，且本征频率计算是下限(Zienkiewicz, 1967, pp.23—24)。应为下限计算要求一个完全新的，且(至少是)同等复杂的问题求解，因而这种方法很少采用。代以之，为了得到予期精度的"探测"，通常是简单的应用数值类比。可能的类比包括：(i)将解与一个存在的计算机程序相比，此程序是用不同的算法求解相同问题的某一单项；(ii)将一个类比问题的解与已知的解析解相比；及(iii)将两个Rayleigh-Ritz解与基函数的不同数目相比较，第(iii)个方法最容易进行。它设法度量作为与 N 有关的本征频率的收敛性。当本征值趋向于迅速收敛(只要新的基函数有意义地加到相应的本征函数表达式上)并接着稳定在正确值的附近，这能非常好地工作。此方法的困难是：如果这套基函数相对于某一特殊类型的本征函数来说是不足的，则收敛会难以相信地慢。

2.2 推广和特殊情况

上面给出的公式当与原来推导一致时(Rayleigh, 1877)，则这不是 Rayleigh-Ritz 算法的最一般的叙述。实际上，Rayleigh-Ritz

方法可应用于能导出变分原理的任何问题中。象已指出的那样，非均匀的和简正振型两者都可求解。除Sturm-Liouville问题之外，Rayleigh-Ritz算法还可应用到Helmholtz方程、Maxwell方程和Schrödinger方程中。其极限解是极小并不是必须的。保守系统的观念能推广到包括与速度有关的位函数Goldstein, 1950, p. 19)。进一步，只要当$|x|\to\infty$时，本征函数衰减充分地快，则固定有限边界就能被放松到包括无限介质。

Rayleigh-Ritz算法象对连续问题一样，能应用于离散的问题，也能对三维问题一样用于一维、二维问题中。模型和本征函数两者也都可有多个分量。例如，在各向同性的弹性问题中，模型包括密度和两个Lamé参数。它们中的每一个可以是位置的独立函数。本征函数可包括一个或多个的标量、矢量或张量或它们的某种组合。方便的是设想每一个标量和矢量或张量的分量作成一个单独的标量函数，通常每一个标量是各个单独微分方程的解，标量间的关系由微分方程间的耦合来确定。例如，一个P-SV弹性波传播问题的本征函数有三个标量(两个位移分量和一个重力位扰动)，它们是三个耦合的二阶微分方程的解。

为简单起见，下面将以一维问题的内容讨论Rayleigh-Ritz问题的详细产生过程及其解。在适当的地方将讨论多分量模型及本征函数。这与作者在计算球状平均非旋转、自重的各向同性地球模型的自由振荡并由此而得到的说明、注意、比较和计算机程序的经验相一致。此问题的详细情况可看Buland和Gilbert(1984)的文章。下一节将概略叙述解静态问题的一般方法。本章的其余部分将与本征值问题有关。自然基函数的简要检验之后，将专门讨论样条(有限元)基函数。将给出计算基函数构成的矩阵问题，匹配边界条件，及寻求本征频率和本征函数的数值方法。也将叙述一些重要的特殊情况，数值困难性和性能提高的诀窍等。最后，Rayleigh-Ritz法将与投射法相比较，并与Galerkin及有限元法形成鲜明对照。

2.3 静态问题

对于静态问题，式(8)得出$\overrightarrow{\mathscr{U}}\mathbf{a}^{T}=0$。不经修改，仅能得到零解，当求与任意边界条件相协调的解时，很好的方法是选择一个满足所有边条件的基函数及N个在边界上无贡献的基函数（Carrier 和 Pearson，1976，pp.174—177），满足边界条件的基函数系数必须固定为1。重复导出式(8)的一些步骤得到$\overrightarrow{\mathscr{U}}\mathbf{a}^{T}=b^{T}$，这里右边来自满足边界条件的基函数。当求得与内部的等效体力的特定分布相协调的解时，对基函数不需要作修改。在此情况下，非零的右边来自等效体力所作的功(Zienkiewicz，1967，pp.18—21)。在不论何种情况下，静态问题仅需要求解一个简单的线性方程组，这可用不同的方法进行。由于$\overrightarrow{\mathscr{U}}$的对称性，下面讨论的 Cholesky 分解(Mirtin 等，1971a)将是特别合适。

3. 自然基函数

当给定了必须计算到某精度的最光滑的本征函数及它们相应的本征频率特殊子集时，基函数的选择完全决定了可以求解出式(8)的方法及数字上的特性(存贮位置数及所要求的浮点运算)。对于具体问题，基函数的选择将决定于最小的处理速率、记忆容量和解题所必须的联机和脱机的贮存容量(真实的时间值)。

在某一意义上选择基函数的传统方法是使利用对问题来说是“自然的”那些函数所要求的数目达到极小。术语“自然的”一般意思是，N个基函数中的每一个或者是已知的，或者被估计为最接近系统的N个最光滑简正振型的本征函数的一个。自然基函数或者由计算较简单的、但紧密相关问题的本征函数求得，或者用满足接近边界的已知特征和边界之间所估计的构成函数来求得。有关的方法是应用正交多项式，这些多项式对于所包含的微分方程来说是自然的(Morse 和 Feshbach，1953，p.1118)。当然，要产生

多分量本征函数问题的自然基函数有更多的困难，然而，有可能独立地模拟每一个标量。这有两个缺点，第一，如果有 J 个标量，则必须解 $JN\times JN$ 阶的矩阵（而不是一个 $N\times N$ 阶矩阵）。第二，选择与多于一个标量有关边界条件相配的标量，是困难的。

一般说来，这样的自然基函数的利用会产生稠密矩阵 $\vec{\mathscr{U}}$ 和 $\vec{\mathscr{K}}$（全部元素是非零的）。然而，如果基组选得好，这些矩阵将是对角优势的，会稳定逐次的数值计算。对于稠密对称矩阵，解(8)式的方法是熟知的（Martin 和 Wilkinson, 1971a），这里仅概略地说明。注意，全部取自 Wilkinson 和 Reinsch（1971）的参考文章，包括 Algol 程序及试验情况。以动能密度矩阵 $\vec{\mathscr{K}}=\vec{\mathscr{L}}\vec{\mathscr{L}}^{\mathrm{T}}$（Martin等，1971a）的Cholesky分解开始，这里 $\vec{\mathscr{L}}$ 是下三角形的（即对角线以上的元素为零）。用 $\vec{\mathscr{L}}^{-1}$ 乘以式(8)的左边，并将动能密度矩阵代入，得

$$(\vec{\mathscr{L}}^{-1}\vec{\mathscr{U}}\vec{\mathscr{L}}^{-\mathrm{T}}-\hat{\omega}^2\vec{\mathscr{P}})\vec{\mathscr{L}}^{\mathrm{T}}\mathrm{a}^{\mathrm{T}}=(\vec{\mathscr{A}}-\hat{\omega}^2\vec{\mathscr{P}})\mathrm{c}^{\mathrm{T}}=0 \qquad (12)$$

这里 -1 的意思是矩阵逆，$-\mathrm{T}$ 的意思是转置逆。方程式(12)是标准形式，可由各种不同的标准方法来解，所推荐的方法是Householder 旋转（Martin 等，1971b），将 $\vec{\mathscr{A}}$ 化简成三对角线形状（即除主对角和第一条上下对角线上元素外，其它元素均为零）。因而本征值可由均分而得到（Barth 等1971）。这个方法用Sturm数来控制均分，且由于三对角线矩阵的 Sturm 数能非常快算得，所以是很有效的。Sturm 数是 $\vec{\mathscr{A}}$ 的本征值数目，它们小于 $\hat{\omega}^2$ 的试验值。最后，本征矢量可由逆迭代法求得（Peters 和 Wilkinson，1971）。

执行 Cholesky 分解的 Fortran 程序已由 R. L. Parker从Algol（CHOLIN 子程序）译出。执行 Householder 三对角线化、本征值的均分及对一个实矩阵的本征矢量的逆迭代的程序，已从 J.F.Gilbest 写成的程序（子程序DIAG）修改得到。如果 Cholesky 分解被用于静态问题，则 CHOLIN 要求伴随子程序 CHOLSL（也由R. L. Parker 翻译）来完成对 a 的解。注意，随同本章一些程序的简略说明在程序索引中给出。这些程序将通过相应的正文给予讨

论。对于 Cholesky 和 Householder 方法，所要求的计算机存贮量比例于$(JN)^2$，浮点运算数比例于$(JN)^3$。在下节，对选择基函数导出待探求的稀疏矩阵问题(即多数矩阵单元为零)的不同方法将给予探究。在某些情况下，稀疏公式可能较快，或更方便，或者两者兼之。

稠密和稀疏问题两者都能证明有下列共同的特征，第一，算法可被安排得使本征值将以升阶(或降阶)顺序求得，且使均分能在任意时刻中止(例如，在已求得R个最光滑本征函数之后)。进一步，象要求的那样，可以求得每一个本征值的本征矢量。即仅当实际要求的本征值和本征函数需要计算时才进行。第二，实际上，现代的本征值-本征矢量算法非常稳定和精确。所求得的这组本征值保证是完全的，且本征矢量保证在机器精度范围里是正交的。甚至相近一致的本征值的本征矢量能适当地处理。

3.1 实　　例

为了说明自然基函数的 Rayleigh-Ritz 法，下面考虑一个两层球状对称、非旋转弹性各向同性地球模型的扭转型自由振荡，此模型具有液体内核，及在整个地幔中随半径r线性变化的密度ρ和刚度μ。这个问题是有一定的地球物理意义的，它能做得非常近似于地球。这对简略地处理来说，也是足够简单的；而对于方法的某些细节来说，却是足够复杂。为推导某些自然基函数，应考虑密度和刚度(因而横波速度v_s)在整个地幔是常量的相关问题。为了使这个模型更有物理意义，令核半径r_c是3480km，地球半径r_e是6371km，密度为4448.8kg·m^{-3}，刚度为$1.6310\times10_{11}$ nt·m^{-2}(这使横波速度为6.0548km·s^{-1})。这些参数已由Dziewonski 和 Anderson(1981)的PREM模型中推得。本征函数的空间部分为$s(x)={}_nW_l(r)Y_l^m(\theta,\phi)$，这里$W(r)$是本征函数的径向部分，$Y$是完全归一化了的球谐函数，$\theta$是余纬，$\phi$是经度，$l$是角阶数，$m$是方位阶数和$n$定径向阶数，在下面，$l$将取为 2，$m$能

被略去及 n 简单地是一个对于相同 l 的逐次高频解的数目，为了方便，这些振型将以 ${}_nT_l$ 表示(以通常的方法)。

去掉下标与上标，W 满足微分方程

$$\kappa^2r^2\ddot{W}(\kappa r)+2\kappa r\dot{W}(\kappa r)+[\kappa^2r^2-l(l+1)]W(\kappa r)=0 \quad (13)$$

这里 $\dot{W}$ 和 $\ddot{W}$ 代表对于半径的一阶及二阶导数，$\kappa=\omega(\rho/\mu)^{1/2}=\omega/v_s$ 是波数，须由边界条件,即在 r_c 和 r_e 处 $\dot{W}(\kappa r)-W(\kappa r)/r=0$ 来确定(液体核中可无扭转运动)。这个方程解的形式是 $W(\kappa r)=\beta j_l(\kappa r)+vy_l(\kappa r)$。这里 j_l 和 y_l 是第一类和第二类球Bessel函数。常量 β 和 v 由满足核-幔边界条件及将试验本征函数归一化到单位动能而求得。然后有无限离散数的 κs 来满足自由表面边界条件。由递推关系(Abramowitz 和 Stegan. 1968，pp.452—453)计算球 Bessel 函数。角阶数为 2 的头 5 个本征周期给出在表 1 中。

对于线性模型，让 $\rho(r)=\rho_0(3.4662-3.0481r)$ 和 $\mu(r)=\mu_0(1.8426-1.0827r)$，这里 ρ_0 和 μ_0 是均匀模型值。这些函数也已从 PREM 模型中推得。对于这个问题，式(1)可写成

$$\delta\left[\frac{1}{2}\omega^2\int_{r_c}^{r_e}\rho W^2r^2\mathrm{d}r-\frac{1}{2}\int_{r_c}^{r_e}\mu\{(l+2)(l-1)W^2+(r\dot{W}-W)^2\}\mathrm{d}r\right]=0 \quad (14)$$

这里角坐标已被积出，定义 ρ 和 μ 的扰动分别为 $\rho(r)-\rho_0$ 和 $\mu(r)-\mu_0$ 时，式(2)可应用来计算 $\delta\omega$。积分已用象下面第4.1节讨论那样的96点 Gauss-Legendre方法计算出(Abramowitz和Stegun, 1968, p.887)。最终的本征周期也在表 1 给出。$\hat{\omega}^2$ 的直接估算也可从式(3)得到。这种计算结果也给出在表 1 中(称为商法)。在这种情况下，扰动法与商法几乎得到相同的估算。但这些方法实际上是十分不同的，扰动法是用来扰动系统的本征函数计算。而商法是应用来对扰动系统的本征函数的估算。在这种情况中，未扰动模型的本征函数能象扰动模型的本征函数的估计一样来使用，因为它们都满足两个模型的边界条件。由于没注意要保证地球质量保

持常量，这样就发生均匀和线性模型之间向较短周期的系统偏移。

表1　用扰动法和商法计算的均匀模型和线性模型的扭转型本征周期(单位：s)

计　　算	${}_0T_2$	${}_1T_2$	${}_2T_2$	${}_3T_2$	${}_4T_2$
均　　匀	2744.0	809.6	455.9	311.7	235.9
扰 动 法	2689.3	781.3	435.3	296.9	224.5
商　　法	2684.8	783.2	436.1	297.4	224.9

表2　用自然基函数的Rayleigh-Ritz法计算的扭转型本征周期(单位：s)

基　函　数	${}_0T_2$	${}_1T_2$	${}_2T_2$	${}_3T_2$	${}_4T_2$
2	2692.7	779.9	—	—	—
3	2694.0	795.8	436.0	—	—
4	2694.2	797.4	446.4	296.4	—
5	2694.2	797.9	450.0	306.2	223.1
6	2694.2	798.0	450.5	307.8	231.3
7	2694.3	798.0	450.6	398.4	232.8
8	2694.3	798.0	450.7	308.5	233.4
9	2694.3	798.1	450.7	308.6	233.6

为应用Rayleigh-Ritz法，均匀模型的最低频率的本征函数取作为一组基函数，象刚才已知道的那样，它们已满足线性模型的边界条件。计算式(6)中的积分时，能构成式(8)中给出的本征值问题，且能象前节中所述的那样求解。用2—9个基函数得到的最终本征周期示于表2。注意，每一个振型的本征周期估算值随所用的基函数数目而单调增加(即本征频率估计值必是上限的，单调地减少)。对任意数目的基函数，最后的(最低的)本征周期估算决不会象扰动结果那样好，至少对本例是这样。然而，应用$i+2$个基函数时，第i个本征周期估算是十分稳定(例如，当用4个或更多的基函数时，${}_1T_2$的本征周期开始稳定化)。

4. 有限元基函数

实际上，自然基函数由于各种各样的原因常被放弃。对于复杂的物理系统，无论是解析的或是数值的，都会是很困难推导出合适的自然基函数，进一步，当要求大量解时，求解稠密系统将是不经济的，除非$R \approx JN$，这要求自然基函数确实很好。如果要求高精度的本征值，这问题甚至变得更严格。由构造工程师们首先提出的不同方法，是使用空间分布的基函数(往往称为有限单元)。这个方法的原来用意是与建筑物上的物理结构单元等同。然而，有限元也可当作按段泛函内插的基函数。这种方法的完全的通性能提供复杂物理系统的全部特殊情况(甚至非预定的)合适的解。另外，这些复杂的边界条件和内部约束(甚至对于多分量的本征函数)能强行进行计算。最后，即使当$R \ll JN$时，一般说来，最终的系统在计算上仍然可以有效，因为它将导致出稀疏矩阵问题。

有限元基本组可用构成一组位置"节点"x_i来形成，使得$x_1 < x_2 < \cdots < x_N$，这里(x_1, x_N)是问题的区间。多于一个不同类型的基函数(I类型)能与每一个节点相关。这将是在每一个节点上的每一类型基函数的重复(除转移与标定外，这是同等的)。基函数要选择得容易计算和微分，充分地光滑以提供本征函数可接受的内插，且相互重叠尽可能小。重叠的程度将确定每一个基函数将与多少个最接近的相邻函数相互作用(在每一边为P)。当一对基函数之间不存在相互作用时，则相应的矩阵元素将为零。因此，刚度矩阵和质量矩阵将是稀疏的。适当地排列式(8)的联立方程式，使全部非零元素都在对角线附近。这样的矩阵被称为带状的，要求的标量函数的数目为J，在每一个节点上的基函数的数目为I及重叠的程度P，将确定矩阵的带宽M(非零的上对角线的数目)。注意，带宽为M的矩阵实际上有$2M+1$条非零对角线(主对

角线及由于对称性，有M个上对角线及下对角线）。粗略地说，$M=IJ(P+1)-1$。一般说来，存贮和计算量两者都随M增加而增大。

为了估算特定问题的范围，必需选择所用的基函数类型（这确定I）和所用的基函数数目（这确定N）。对于给定的精度，N将与所用的基函数的类型和分布有关。当应用较光滑基函数时（更高阶连续导数），则所要求的基函数数目迅速减少。基函数的分布被改变时，表达本征函数的能力可能上升或下降。事实上，在整个模型中，要求以同样适当的程度来表达本征函数的最坏的结构，这种方法使N达到极小。Buland和Gilhert (1984) 给出一个优化节点设置的方法，该设法保证要研究的全部本征函数的每一波长上的基函数是极小数。

最简单的有限元基函数是按段线性内插的这些基函数，这种选择提供的函数连续，但一阶导数不连续（按段常量）。在这情况下，有一种类型的基函数($I=1$)和仅与最邻近的重叠 ($P=1$)。给出一组节点，每一个标量表达为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}F_i\zeta_i(x) \tag{15}$$

这里F_i是系数，ζ_i是N个基函数，定义为

$$\zeta_i(x)=\begin{cases}t_0/\Delta_0 & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\\ 1-t_1/\Delta_1 & x_i<x\leqslant x_{i+1}\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{16}$$

这里$t_j=x-x_{i+j-1}$和$\Delta_j=x_{i+j}-x_{i+j-1}$。注意，$\zeta_i(x_{i-1})=\zeta_i(x_{i+1})=0$以保证连续。也有基函数被归一化，使$\zeta_i(x_i)=1$，这意思是$f(x_i)=F_i$。事实上，用按段线性基函数表达的$f(x)$与$N$个值的$f(x_i)$的按段线性内插相一致。这是这样事实的结果，即这些基函数是“局部的”(即如果$x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$，则$f(x)$仅依赖于与节点$x_{i-1}$和$x_i$有关的系数值)。按段线性基函数的运用，导致出带宽为$2J-1$。

如果要求连续的一阶导数，则能用按段平方内插基函数。如果要求连续的二阶导数，则能用按段立方内插基函数（称 为B样条）。无论哪一种情况中，表达都不是局部的。两种 情 况中，都仅存在一种类型的基函数($I=1$)。然而，二次基函数在每边与它们的下两个最近相邻函数重叠($P=2$)，而立方基函数在每一边与它们的下三个最近相邻函数重叠($P=3$)。也就 是 对 于一个完全的表达，需要有$N+1$个二次基函数或 $N+2$ 个立方基函数。这种对附加自由度需要是非局部基函数的一般特性。这意味着本征函数的表达可以与相应的内插不同。非局部基函数 的 另 一 个结果是，在节点上，系数与函数值之间没有简单的关系。二次与立方的基函数分别导致出带宽为$3J-1$和$4J-1$。对一特定的节点组，二次基函数由子程序QSBF计算，立方基函数由子程序B SBF 计算。

也有可能构成按段立方基函数，这些基函数用按段Hermit立方内插的基函数时是局部的(称为H样条)。这种类 型的内插不仅适合于每一个节点上的函数，而且也适合于它的一阶导数。立方的 Hermit 内插提供一连续的函数和一阶导数，但间断的二 阶 导数。H 样条在每个节点上由两个不同的基函数表达($I=2$)，但每一个函数都是局部性 的 ($P=1$)。 给定一组节点，每一标量表达为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N}\{F_i\chi_i(x)+\dot{F}_i\psi_i(x)\} \tag{17}$$

这里F_i和$\dot{F}_i$是系数，χ_i和ψ_i是$2N$个基函数，定义为

$$\chi_i(x)=\begin{cases} 3\frac{t_0^2}{\Delta_0^2}-2\frac{t_0^3}{\Delta_0^3} & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i \\ 1-3\frac{t_1^2}{\Delta_1^2}+2\frac{t_1^3}{\Delta_1^3} & x_i<x\leqslant x_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{18}$$

和

$$
\psi_i(x)=\begin{cases}-\dfrac{t_0^2}{\Delta_0}+\dfrac{t_0^3}{\Delta_0^2} & x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i \\ t_1-2\dfrac{t_1^2}{\Delta_1}+\dfrac{t_1^3}{\Delta_1^2} & x_i<x\leqslant x_{i+1} \\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{19}
$$

注意$\chi_i(x_i)=\dot{\psi}_i(x_i)=1$和$\dot{\chi}(x_i)=\psi_i(x_i)=0$，这保证$f(x_i)=F_i$和$\dot{f}(x_i)=\dot{F}_i$(这里小圆点是对位置的微商)。H样条基函数也导致出带宽为$4J-1$。这些基函数由子程序HSBF产生。给出一组有$2N$个系数F_i和$\dot{F}_i$的值，在任意点上，能用函数HSPLN计算单一的H样条内插。

如果$h=\max|x_{i+1}-x_i|$，则线性基函数得出本征函数有$O(h)$精度，本征频率有$O(h^2)$精度。二次基函数分别得出$O(h^2)$和$O(h^4)$精度，而B样条和H样条基函数两者都分别得出$O(h^3)$和$O(h^6)$精度。当然，H样条给定h时，会有两倍B样条那样多的基函数，且(像期待的那样)能证明给出稍高一点精度的结果(Birkhoff等，1966)。对于相同节点数，高阶法会有较大的带宽，因此要求有比低阶法更多的计算量(及存贮量)。但对于同样的精度，高阶法可需较少节点，使得它们实际上可以要求比低阶法要少的计算时间。

4.1 矩阵元素的计算

如式(6)所示，每一个未知的标量函数中，用基函数的线性组合代入，将变分方程转换成一个代数方程。一般说，最后的积分包括独立变量，模型，模型泛函和成对的未知函数(或它们的导数)的乘积。当模型是多分量时，被积函数将是所有模型分量求和，即每一个分量乘以各自的核函数。当本征函数是多分量时，则每一个核将是所有二次项求和，即每一个包括独立变量，模型分量的泛函，本征函数标量(或它的导数)中的一个基函数和标量(或它的导数)中另一个基函数的乘积。例如，参看地球的自

由振荡的公式(Pekeris和Jarosch，1958)。

虽然进行这些积分的最佳方法与它们的正确形式有关。但已经出现一套多项式有限元基函数算法，这种算法一般说是快速、精确和稳定的。这种方法包括利用基函数多项式性质和它们有限的空间范围两方面的优点。为了弄清对此的含意，可考虑一种情况，在这情况中，模型分量由分段多项式表达，这些多项式在基函数节点上相联。在许多情况中，现在的被积函数是一个简单的但颇高阶的，独立变量的分段多项式。因而，任何两个节点之间，积分能解析求值。遗憾的是这种过程数值上是不稳定的(由于高阶项间的相消)。一个理论上等效的、数值上稳定的，且实际上比计算解析解要快的不同方法是用Gauss-Legendre积分。这包括在S个位置上(由算法决定)计算被积函数及用S个权重(也由算法确定)自左乘的计算值求和。当积分多项式的阶数高到$2S-1$时，S阶的Gauss-Legendre积分在理论上是精确的。在Abramowitz和Stegun书中(1968)的887和918—919页讨论了Gauss-Legendre积分，并给出了坐标和权重表。函数GLQ执行较低的不同阶的Gauss-Legendre积分。

在一些情况中，这方法能直接应用(例如，一阶间断之间用多项式表示的一些地球模型。这些间断必须与节点相一致，为了满足边界条件)。在一些情况中，模型用在离散点上的值来表示。这样一些模型可用B样条以按段立方多项式进行满意地内插。这种内插由子程序BSPLN执行，且按段多项式可用函数BSPLE在任意点上求值。但是，不同的是模型采样点将与基函数节点一致。当有可能内插模型时，在节点上采样及然后再内插它，结果常常不是合适的，问题在于再次内插非常微小地改变了模型的多项式表达，使得难于重新产生高精度的结果。如果不能再内插的话，或者如果模型表达不易转换成多项式，或被积函数不是精确地为多项式(有时出现在被积函数中的模型泛函产生非多项式特征)时，则Gauss-Legendre积分仍可在节点间使用，但它不再是精

确的。形式上，它将等效于用一个 2S-1 阶多项式内插被积函数，然后积分内插多项式。实际上，Gauss-Legendre 积分将仍得到极好的结果，特别是当积分阶数稍增加时。

如已指出的那样，复杂的变分积分由许多项组成。它们中的每一项可用不同阶的多项式表达。不考虑所要求的附加计算，积分次序的选择会有实质性的效率。这是因为执行积分时，大多计算工作量是花在计算 Gauss-Legendre 积分点上的基函数和模型上。如果仅存一个积分次序，则这些计算仅需一次完成。进一步，积分权重和要计算的基函数的乘积可预先形成。事实上局部基函数以积分点那样的同样方法用节点匹配来标度。因此，只有一个基函数必须在积分点上给予计算。

4.2 适合边界条件

在Rayleigh-Ritz 算法的多数讨论中，选择已适合全部边界条件的基函数。事实上，没有必要正确地适合边界条件。有可能把边界条件用这样的一种方法，即在计算本征函数过程中，它们被近似地相适而归并到变分原理中(Carrier 和 Pearson，1976、pp. 176—179)。去掉边界条件正确适合的约束，可能更接近极值，这样，平均意义上更好近似于本征函数。对于很简单的基函数(例如，线性基函数)，当存在正确地满足全部边界条件的不充分的自由度时，必须应用这种方法。在这里不进一步研究这种方法。代以之，将假设读者要求的边界条件被正确满足，甚至本征函数近似得不十分好时也能这样。

为了执行有限元基函数这个更传统的方法，必须在边界上构成特殊的基函数，它们适合全部边界条件。这样做的最简单的方法是从原来基函数的线性组合来构成特殊基函数。考虑在模型端部的边界条件。就结构来说，在每一边界上正确地存在一个节点。近于这些边界的基函数在这种意义上说将是特殊的，即它们必须被截断以便不延伸到模型区域之外。有限元基函数的分段本

质使得在节点处截断能很方便进行处理。唯有这些部分基函数在边界上为非零。因而在一边界上满足全部约束的特殊基函数将由同一边界上部分基函数的线性组合来构成。

为了明白这种线性组合是如何形成的，下面考虑一典型边界条件，这边界条件要求本征函数标量(或它们的导数)的线性组合是常量。因为每一个标量是基函数的线性组合，这总能被变换成这样处理，即未知系数的一种线性组合(全与部分基函数有关)是常量。解这种方程时，系数中的一个能用其他系数确定。用表示偏差标量和结合项的基函数的线性组合代替这个系数，会有消去一个基函数和修改其他基函数的效果。这由下面的简单例子说明。设 x_N 是一个边界节点，在这节点上有 $\dot{f}(x_N)-\alpha f(x_N)=0$。如果用H样条表达，这要求 $\dot{F}_N=\alpha F_N$。代进式(17)得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\{F_i\chi_i(x)+\dot{F}_i\psi_i(x)\}+F_N\{\chi_N(x)+\alpha\psi_N(x)\} \tag{20}$$

系数$\dot{F}_N$和与它有关的基函数已被消除。然而，与系数 F_N 有关的基函数是满足边界条件的 2 个原来部分基函数的一种线性组合。用一系列类似的运算，一整套的边界条件(甚至包括不同的标量)可同时被满足。

就算法上说，更方便的是原来基函数(除去截断外，它们全部是相同的)形成矩阵元素并满足边界条件。这是等效的，因为基函数线性组合的积分相同于基函数积分的线性组合。由于核的二次性质，所以每一个基函数影响刚度矩阵和质量矩阵的一行和一列的全部元素。因而式(20)的矩阵等效性是形成在适合一特定边界条件时所涉及的系数有关的行与列的线性组合。与要消去的系数有关的行与列也将被消去，这个过程由Wiggins(1976)作了详述。

用设立每一个区域(两边界之间)的分离问题，就能构成一个内边界问题。因为在每一边界上基函数是全部被截断的，所以每一个问题将是独立的。然后按计数边界的次序把每个分离问题的

矩阵组合起来，从而由两个包含全部信息的块状对角矩阵$\overrightarrow{\mathscr{U}}$和$\overrightarrow{\mathscr{K}}$形成块体群。最后，这些块体在内边界上由边界条件相互“连系”着，而构成一个较大的系统，满足这些边界条件本质上是等同于上述讨论的过程，仅有的不同是在每个线性组合中的常量可来自边界的两边，在某些情况下，适合边界条件能局部地增加或减少矩阵的带宽。如果带宽增加，性能将会遭受损失，甚至最外边上对角线只含有一个元素。

本征函数标量或者它们的导数之间的线性等量约束也是这样，可用基本相同的方法强加在边界之间。在这种情况中，约束是强加在要研究区域的每一个节点上。虽然这方法对于满足边界条件来说是相同的，但结果是宁可将一个线性依赖关系强加在连续本征函数标量上，而不加在一个绝对或跳跃边界条件上。

4.3 求解带状本征值问题

有限元基函数的应用引出稀疏矩阵的结果。如果方程按矩阵给予整理排列，使得与每个节点有关的全部基函数(或全部标量)分在一组，且使得节点按相继次序计入，则这些矩阵将是具有IJ行乘$IJ(2P+1)$列块体的块-对角状的。当然，这可认为是一个带变为$M=IJ(P+1)-1$的带状矩阵。因为矩阵是块-对角状的，所以最外边的IJ上对角和下对角将相继地变成离主对角越远则越稀疏。这类问题对于寻求本征值和本征矢量会提出两个主要困难。第一，如果能找到一个方法，它能用矩阵稀疏特性的优点来减少所要求的计算而解决问题，则有限元基函数在计算上才有用。第二，一般说来，刚度矩阵或质量矩阵不是对角的。用所有的已知(精确的)方法去对角化两者中任一个都要破坏问题的稀疏性质。

已经发展了一种有效地处理带状系统的方法。一般说，除去问题决不化成标准形式之外；这方法平行于解决稠密系统的方法。对于任意的尝试的本征频率，形成带状矩阵$\overrightarrow{\mathscr{E}}-\overrightarrow{\mathscr{U}}-\hat{\omega}^2\overrightarrow{\mathscr{K}}$。

因为边界条件在$\vec{\mathscr{U}}$和$\vec{\mathscr{K}}$中已被适合，所以它们在$\vec{\mathscr{C}}$中也已被适合。因而$\vec{\mathscr{C}}$能用一个方法给予上三角化，该方法减小对角线以下的带宽至零，并增加对角线以上的带宽到$2M$（Martin和Wilkinson，1971b）。这种算法还计算行列式和$\vec{\mathscr{L}}$的Sturm数。每一个新的尝试本征频率要求再次形成$\vec{\mathscr{C}}$及三角形化。因而每一个行列式和Sturm数的计算都是很花费的（比例于$IJNM^2$运算，且要求有$IJN(2M+1)$个贮存位置）。所以，宁愿应用平分和线性内插组合等计算本征值（Peters和Wilkinson，1969）而不单单应用平分法（基于Sturm数）。详细地说，这方法以给定要研究的本征波谱的上限和下界开始。在末端Sturm数的差立即得出必须找出的本征值数目。然后，平分法（基于Sturm数）用来求出一系列的非重叠区间，每一个区间恰好包含一个本征值。接着，用平分和线性内插精选每一个本征值。对于所考虑的每一种有限元基函数，带宽的大小量级，存贮位置的数目，浮点计算数目，本征函数和本征频率的精度等都在表3给出。

表3 各类基函数带宽M的大小量级，存贮位置数目SL，浮点运算数FPO及精度

基函数类别	M	SL	FPO	$\|s-f\|$	$\|\omega^2-\bar{\omega}^2\|$
线性	$2J-1$	$4J^2N$	$4J^3N$	h	h^2
平方	$3J-1$	$6J^2N$	$9J^3N$	h^2	h^4
B样条	$4J-1$	$8J^2N$	$16J^3N$	h^6	h^6
H样条	$4J-1$	$8J^2N$	$32J^3N$	h^3	h^6

应用本征值的最佳估算的$\vec{\mathscr{C}}$矩阵，由逆迭代法（Wilkinson，1965，pp.628—629）求出本征矢量。逆迭代要求在系统$\vec{\mathscr{C}}\mathbf{a}_k^T=\mathbf{a}_{k-1}^T$中解出$\mathbf{a}_k$，这里$\mathbf{a}_k$是本征矢量$\mathbf{a}$的第$k$次迭代。这个辅助性问题能用求出Sturm数（Martin和Wilkinson，1971b）的相同的三角化方法解出。一旦求得本征矢量，则本征值能用构成Rayleigh商再精算。本征矢量的元素含有要完全地叙述本征函数必须的全部信

息。如果$I>1$,则对应于不同标量的系数必须“多路分离”。最后，为要适合边界条件而要求消去的系数必须由存在的系数的适当线性组合来计算。

因为这种算法是以带宽的平方进行的，所以对于相对小量的信息，稀疏的最外对角线导致高的成本。如某些边界条件已增加了少数点上的带宽，则这个问题会更严重。Givens 转动在进行上三角化之前，用 Schwarz(1971)所叙述的一系列 减小带宽来改善稀疏的最外对角线的影响。适当地选择Givens 转动能消去在最外下对角线和上对角线上的一个元素而不增加带宽。因而，这种算法的进行是依赖于在要消去的每一对角线中的非零元素的数目。消去有系统地稀疏的最外对角线的全部元素(至少是 $IJ-1$ 个)证明是值得的。Givens 转动数列必须贮存起来，并在本征函数形成之前用于“不转动”本征矢量。

对于地球的自由振荡，在初始平分过程中，每个最后的本征值要求 2 个至 3 个尝试本征值。此外，约有10个试验本征值必需用平分和线性内插法对每一个本征值进行精选，使达到 10^{11} 的精度。求解广义的带状本征值问题的这套程序，由子程序 JHW 控制。初始的平分由子程序EGNVL 监督。每一个本征值由函数FZERO精选，它调用函数BDET 进行上三角化及计算行列式和Sturm数。本征矢量由子程序SRAY求得。它调用子程序BSOL 用三角化求解线性方程系统。SRAY 用逆迭代进一步精选本征值。Schwarz(1971)算法由子程序BDRD执行。注意，如果 BDRD 与JHW应用时，则在本征矢量计算中适当的地方必须小心地应用相同的变换(子程序TANGLE)及它的逆(子程序UNTNGL)。方便的执行过程是在JHW中作某一初始化，在BDET中调用 BDRD及对BSOL和SRAY加上合适的矢量变换(如，见有关程序的提示性说明)。而且，函数DOT在SRAY中(象DIAG一样)完成一个点积。如果DOT是有效的话(特别是在矢量机上)，则采用 DOT 的机器编译(即汇编语言)具有显著优点。对于静态问题，有限元基函数

的应用也导出带状系统。这些问题能经济地用上三角化$\overrightarrow{\mathscr{U}}$解出，即应用BDET，然后用BSOL求解方程系统。

任何 Rayleigh-Ritz 问题的本征矢量将是正交的(因为它们是Hermite系统的本征矢量)，且如果适当归一化，则它们是正则的。自然归一化将使动能为一个单位。虽然这是明显的，但容易忽略：完成这个积分所需要的大部分劳动都已经做了(即总动能KE $\approx\hat{\omega}^2 a\overrightarrow{\mathscr{K}}a^T$)。可以用同样技巧来计算其他有关的积分，例如，对于地球的自由振荡，方便的是将$\overrightarrow{\mathscr{U}}$形成为一个常量矩阵的线性组合，它的系数是角阶数的函数(Buland和Gilbert，1984)。将这线性组合对角阶数取微商，能推得有关的矩阵。然后，这个新矩阵得出一个比例于群速度的积分。另外一个应用是计算扰动模型(式(2))的影响。这是方便的，因为同样的计算程序能用于计算扰动刚度矩阵和质量矩阵，就象对于初始模型的扰动计算那样。例如，地球的自由振荡的品质因子Q能用这方法计算。

4.4 实　　例

上面所用的扭转自由振荡例子也提供出一个应用有限元基函数的合适的例子。在这种情况下，象Buland和Gilbert(1984)阐述的那样，应用分段Hermite立方样条基函数。对于N个节点，$2N$个基函数是有效的，但为满足2个边界条件，2个基函数必定被消去。因而在每种情况中仅有$2N-2$个本征周期要计算。表4表示用2—7个节点得到的结果。在每一种情况下，最后的(最低的)本征周期计算，当情况不坏时，它的精度比自然基函数作出的相应计算要低。但收敛到正确的本征周期象用自然基函数得到一样快或更快(甚至考虑到在每个节点上2个基函数相加的事实)。这种特性可归因于有限元基函数精确地表示由线性模型所要求的不论什么样的本征函数形状的能力。所应用的自然基函数比任何单个Hermite样条更类似于线性模型的本征函数。但是，在精确地表示线性模型的本征函数所需要的自然基函数中的信息是分布在大

量的基函数上。在一些极端情况中，系统的本征函数可以这样不同于自然基函数，以致要求许多比有限元基函数更多的自然的基函数。例如，如果用角阶数为 2 的扭转本征函数做为角阶数为10的扭转振型的基函数，则这种情况就会存在。角阶数为 2 的本征函数是贯穿地幔的振荡。高频率角阶数为10的本征函数是上地幔的振荡，它在下地幔接近于零。因而，需要非常大量的基函数来达到必要的对消。用有限元基函数不发生这样的问题。

表4　用有限元基函数，由Rayleigh-Ritz法得到的扭转本征周期(单位：s)

节　　点	${}_0T_2$	${}_1T_2$	${}_2T_2$	${}_3T_2$	${}_4T_2$
2	2693.5	783.7	—	—	—
3	2694.2	797.6	447.1	289.4	—
4	2694.3	798.0	450.4	306.8	226.6
5	2694.3	798.1	450.6	308.3	232.4
6	2694.3	798.1	450.7	308.5	233.4
7	2694.3	798.1	450.7	308.6	233.6

5.　频率相关问题

在一些问题中，无论是模型还是边界条件(或两者)都可以与要计算的本征值有关。如果某给出频率相关的简单方法能够得出，及对本征波谱的影响是足够的小，以致本征值的量级不变，则Rayleigh-Ritz 法可修改用来处理这种情况。这种可能性的理由是，对于广义的带状本征值问题，$\vec{\mathscr{C}}$已经是频率相关的，且不论怎么说，对每一个新的试验本征值，都必须重算。如果边界条件与频率无关，则它们在$\vec{\mathscr{C}}$形成之前，就可以在$\vec{\mathscr{U}}$和$\vec{\mathscr{K}}$中相适合(一次)。如果边界条件也是与频率有关的，则$\vec{\mathscr{C}}$必须从$\vec{\mathscr{U}}$和$\vec{\mathscr{K}}$中计算，$\mathscr{U}$和$\mathscr{K}$没有适合边界条件，而且对于每一个试验本征值，边界条件必须直接在$\mathscr{C}$中适合。这种方法有奇异的特性，即每一本

征函数是一个稍许不同问题的解(虽然全部问题严格地有相同的形式和特征)。因而，一般说来，这样一个问题的本征函数将不是正交的。

5.1 逆频散

对于多数问题，波数随频率而增加，但这决不是普遍的。例如，在包括稳定成层液体的自由振荡问题中，当频率减小时波数增加。在这种情况中，与最光滑的本征函数有关的本征频率通常处在很低的频率。较高波数振型的本征频率减小趋向于零。由粗劣估算的低频振型的上限而引起的要研究的本征波谱污染问题已叙述过。这个问题由于应用有限元基函数被严重地加剧了，因为一般说来，为了对要研究的振型达到足够的精度，可能的本征频率的数目比要求振型数要大得多(即$IJN \gg R$)。这会产生大量的振型，这些振型有如此高的波数，甚至使得本征函数的最粗略的特征也不能适当地表示(即每波长只有小于2个节点)。这样振型的本征频率将如此不良地被限制着，使它们可能出现在要研究的本征波谱之下、之中或甚至之上。在一些情况中，这问题可由变换变分原理来消去，使得解是极大值，且Rayleigh-Ritz法将提供下限。如果不能这样作的话，则问题不可能是一个用变分解的好的候选者。

在某些问题中，例如地球的自由振荡，多数解可以为正常频散的，而一个子集(陷入振型)可以是逆频散(Buland和Gilbert, 1984)。甚至当仅要求正频散解及解的两种类型的本征波谱不相交时，即使逆频散振型的本征波谱是处在比正常频散振型的本征波谱更低的频率时，污染还仍是一个问题。在某些情况中，有可能创造出一个变换，它能消去振型的逆频散子集，如果这不可能的话，则只有改变方法来计算要研究的本征波谱中的全部解，按振型类型分类，然后排去不良表达的逆频散振型。振型的逆频散子集的物理现象在分类中通常是十分有用的。

6. 不 稳 定 性

Rayleigh-Ritz 算法中普遍容易遇到的唯一不稳定性是由于微分方程系统的病态条件。即至少有一个要求的标量是不良约束着，因为它的微分方程与其他方程仅是弱的耦合。当它不适合时，不稳定性取高振荡特征的形式。在复杂振型中，不稳定性可以是局部的。有两种方法可使这问题极小化。第一个是在不稳定区域简单地加更多的节点：这观测到不稳定性移至较高波数(希望移到要研究的本波征波谱以外)。使不稳定性极小的第二个方法是应用一个约束。由于不稳定性的源，常常在恰定约束标量与弱耦合标量之间会有一近似关系。如果近似是充分的好，约束的应用常常会以解的质量上有点小毛病而完全消去不稳定性。

7. 自然基函数再使用

有几种情况，在这些情况中可经济地应用有限元基函数来求解一个问题，然后用这个问题的本征函数作为自然基函数去求解密切相关的问题。最一般的例子是严格地求解许多稍不同模型的同样问题。当一个模型的本征函数是如此类似于另一个模型的本征函数，致使几乎全部辅助稠密系统的本征值和本征矢量是有用的时，这做法是经济的。在这个应用中唯一的困难是一个问题的本征函数不必满足有关问题的边界条件，用由第一个问题本征函数的线性组合产生一组自然基函数，同时也创造另一组任意的但要光滑的(线性独立)函数能解决此困难。这仅当对本征函数有扰动要求时才值得做，因为用式(2)，以少量的附加的计算就能求得对本征频率的扰动。

有时候出现的另一个应用是，一个近似问题可提供实际上希望求解问题的自然基函数。例如，如果重力位的扰动可略去，则

计算地球的球状自由振荡的计算量大大减少(两个耦合的微分方程，而不是三个)，一旦本征位移已得到，对重力位所引起的扰动就能计算。虽然这些函数不是整个问题的解，但它们提供极佳的自然基函数。

8. 与其他方法比较

在一维问题的内容中，Rayleigh-Ritz算法可认为是求解两点边界值问题。对于本征值问题，一个解仅对本征值的某些离散值存在。求解两点边界值问题的有限差分法是紧密相关的。在这个方法中，选择一组节点和每一导数的离散近似(只与节点上的标量值有关)代入微分方程中。最后的带状矩阵系统形式上是与式(8)等同的，应用象在Rayleigh-Ritz系统中用有限元基函数的同样方法可求出有限差分系统的解。然而，本征值计算的上限和高阶精度特性不能保持。

求解两点边界问题的另一个方法是用微分方程的直接解。这些所谓投射法包括选择一个试验本征值，将解从一个边界传到另一个边界及测量最后边界条件的误拟。这个误拟的零点相应于本征值。投射法的特征与Rayleigh-Ritz法的特征非常不同。例如，解在模型的一个区域上常是振荡的，而在另一个区域上很快消失(指数衰减)。在很快消失区，投射法必须在使解增加稳定性方向上求解微分系统。此外，本征函数在最后的边界上必须有一个有限振幅。而Rayleigh-Ritz算法则没有这种约束。具有在两个方向上都很快消失这种解的问题，不能很好地适用于投射法(除非用子行列式重新列出公式)。投射法的性能还与微分系统的"刚度"有关。即当在很快消失区上，指数衰减很快比衰减慢的要求更多的计算。全部Rayleigh-Ritz解要求相同的计算时间。然而，一个强的很快消失振型的本征函数可能不如弱消失振型的本征函数那样好的被表达。

一般说来，对于光滑的本征函数，投射法较快，而对于迅速变化的本征函数，则变分法较快。对于很复杂的系统，Rayleigh-Ritz 方法会有少数几个特殊情况。但投射法对这样一些问题可能会更方便一些，即模型包括具有基本不同特性的区域，而在解中引起不同物理特征的一些问题。例如，地球模型的液体区域引起Rayleigh-Ritz 解中不稳定性及振型的逆频散结果。这两个困难都可用投射法完全消去。相反地，用投射法计算地球的自由振荡时，积分的稳定方向和边界条件必须适合的点都与本征函数有关。进一步，投射法没有办法保证一整组本征函数成正交本征矢量，而Rayleigh-Ritz 解不存在这样的问题。

8.1 有关方法

有许多问题的实际例子，它们在形式上类似于式(1)，但不是变分方程。例如，将滞弹性加在弹性问题上，这将破坏系统的Hermit 特性和解的极值性质。然而，常有可能用上面讨论过的几乎是正确的方式求解这样的一个问题，这种方法称为Galerkin法。可由观测到式(11)与变分解的极值性质无关的事实得到启发。即不用变分原理，可能寻求一个近似的本征函数，使得它用微分算子作用时，得出一个与全部基函数正交的、因而也与它们张成的Hilbert空间中的每一个函数正交的空间误差。因此，真正解在Hilbert空间的投影还是可以求得(Carrier和 Pearson, 1976, pp.177—178)。对于许多但不是全部的问题，Rayleigh-Ritz 和Galerkin 公式变成为等同的，但是当无变分原理时，无论是上限特性或是本征值计算的高阶精度，都不能保持。

另外一个密切相关的方法是有限元法。在标准的工程应用中，有限元方法用来计算结构对外荷载的静态响应(Zienkiewicz, 1967, pp.1—10)。这种方法形式上与用有限元基函数的Rayleigh-Ritz法来求解对荷载的静态解是等同的(Zienkiewicz, 1967, pp. 18—21)。实际上，有限元方法一般包含有上面没介绍过的附加

近似。特别是，虽然介质的弹性是分布的，但常假设质量集中在节点上(集中质量近似)。集中质量的假设是等效体积力只作用在节点上。

有限元法能明显地很适合应用于简正振型问题中。集中质量近似的效果是使$\vec{\mathscr{K}}$为对角矩阵。在这种情况中，Cholesky分解变成为对角化矩阵，而式(8)能象式(12)一样简化为标准形式而不破坏带状特征。Schwarz的方法(1971)可用来简化系统为三角形形式(再一次保持带状特征)。于是，本征值和本征矢量可以用在稠密系统用过的同样方法求得。注意，这意味着，若$\vec{\mathscr{K}}$是成带状的而不是对角线型的，则所有的本征值都能用象一个Sturm数那样的差不多相同的计算量来求得。这种近似能用在带有有限元基函数的任意Rayleigh-Ritz问题中，因为质量是保守的，主要影响是在本征函数上而不是本征频率上。

广泛用于地球物理问题中的有限元法的一个最后应用是模拟复杂介质(常是三维的)的瞬变过程。这是用一个称作为时间分段法来实现的(例Zienkiewicz，1967，pp.166—168)。这个方法是对固定时间点公式化可给出空间问题解，将时间导数当作已知常量(这变成象内部体力同样方式的特征)。然后，用向前差分代替时间导数和所导出的迭代系统中，这里每一次迭代都给出一个新的时间阶段。

9. 结 束 语

变分法原来是在手算的年代获得流行。用少量的自然基函数，以最小的计算量能得到一个中等精度的解。今天，随着几乎普遍地进入有力的超级微机和普遍地进入超级计算机，变分法的作用必定有戏剧性的变化，象已在上面所讨论的那样，变分法特别适合于复杂的2点边界值问题，其中要求大量的高精度的本征值和本征函数。事实上，由于要求的大量计算机内存，这样的方

法在今天比十年前有更大的竞争性。虽然，常常会有高度特殊化了的问题，在这些问题中，变分法是一个自然解。只有时间能告诉，它们是否会继续是对于一般本征值问题的微分方程直接解的可选择方法。最后，这将由需要求解问题的类型、数值分析的进展、及特别由大型的科学计算设备结构的发展来确定。

第 五 篇

通用算法和震源

第一章　矢量和矩阵运算算法

G．L．Pavlis

（印第安纳大学地质系）

1．引　　言

粗略地看一下任何一本数值分析的书，都会发现在任何物理科学中，矢量和矩阵处理的重要性。只要肯定计算机对地震学的重要性，则矢量和矩阵处理对地震学家是同样重要的，就不足为奇了。近年来，随着数组处理器和矢量超级计算机日益增多的使用，矢量运算已经上升到更重要的地位。由于在运算过程中能获得执行时间的巨大减少，这些机器结构驱使我们来检查能够表示为一组矢量运算各个步骤的任何算法。

矩阵和矢量算法，有时出现在使人感到意外的内容上。例如，对微分方程作有限差分解能够想到是用矩阵运算（Lanczos，1961）。本章大量运用作者的地球物理反演理论背景知识，其中矩阵起了主要作用，因而，下面将要给出的大多具体实例都来自这方面的地震研究。

本章可以被认为是对如下发表的文章作一个地震学的注脚。

（i）Lawson等（1979a，b）发表的内容是一个主要的矢量运算算法的里程碑，被称为基本线性代数子程序（BLAS）。

（ii）Dongarra等（1979）发表过一本基于BLAS的矩阵反演程序集。

（iii）Paige和Saunders（1982a，b）发表过用共轭梯度法求解大

的稀疏最小二乘方问题的算法。

(Ⅳ)Lawson和Hanson的书(1974)叙述解不同类别最小二乘方问题的计算形式。

对本章来说，这些资料源是重要的，因为它们都包含有一个或更多算法的、可移植的Fortran执行程序。进一步说，所有这些算法都是公共域软件。我希望将这个颇长的软件集与本书中另外一些算法包括在一起。前面三个资料源叙述如何以一个低的费用得到机器可读编码。但Lawson和Hanson的编码只能打印。

本章集中在由这三个资料源得到的程序的地震学应用上。也包括一些我已经发展了的附加内容和应用这些资料源中一个或多个内容得来的子程序的几个算法。因而，本章可被认为是对具有某些与地震学家有关的特殊附加内容的、矢量和矩阵运算中公共域软件包的一个评述。

2. 基矢量运算

由Lawson等(1979a,b)写的关于BLAS的文章是与矢量有任意关系的科学算法的一个主要进展。在BLAS中要用到的函数综合在表1中。我的观点，BLAS最有意义的方面如下：

(i)当适当地使用时，BLAS具有很高的模块化水平。一旦掌握它们，就会发现，自动地宁愿将算法变换到矢量运算，而不变换到标量运算。

(ii)如果在应用BLAS的算法中，增加速度是本质的，则能用机器汇编语言编译程序，替代相应的BLAS编码。

(iii)它们已经证明了是可移植的。

(iv)它们有首尾一贯的命名习惯，很易记住一个给定的程序名。

(v)它们有首尾一贯、能容易记住的自变量名单。

最后两条及它们与表1的关系，要求有一定的附加解释。每

一个过程由一个"根名"来标记，即它的功能是记忆符号(无论如何都要在由ANSI Fortran规定的六个字符变量名限制之内)。前缀加到"根名"上，描述用来进行运算的矢量的贮存结构。例如，SWAP是根名，它是用来交换两个矢量位置的运算。有三种SWAP的扩充形式，称作为SSWAP，DSWAP及CSWAP。它们分别指定为单精度矢量，双精度矢量和复矢量。在BLAS中，前缀S，D和C始终具有这个意义，使得容易辨别程序期待有什么类型的目标。有不同于这种形式的两种次要例外。

表1 BLAS函数和根名(录自Lawson等，1979a)

函数	根名	主要前缀
x^Ty	DOT	•C, D, S
$x \leftarrow \alpha x$	SCAL	C, D, S
$y \leftarrow \alpha x + y$	AXPY	C, D, S
$y \leftarrow x$	COPY	C, D, S
交换x和y	SWAP	C, D, S
$\|x\|_2$	NRM2	SC, D, S
$\|x\|_1$	ASUM	SC, D, S
$\|x\|_\infty$	AMAX	IC, ID, IS
设置和应用Givens转动	ROTG, ROT	D, S
设置和应用修改过的Givens转动	ROTMG, ROTM	D, S

注：① x和y是矢量，α是标量。

② ←是运算符，表示一个矢量修改另一个矢量。

③ $\|x\|_P$代表L_P范数(Stewart，1973，第166页)。

④ 对于复数x，CASUM计算$\Sigma |Rex_i| + |Imx_i|$代替$\Sigma[(Rex_i)^2 + (Imx_i)^2]^{1/2}$。

(i)由定义可知，有效矢量范数是一个实数，为强调这点，BLAS的作者们选择ASUM和NRM2的复形式为SCASUM和SC-NRM2。

(ii)AMAX用获得x的最大元素控制变量执行L_∞范数。为了

隐含分类的方便，BLAS的作者们使用前缀IS,ID和IC来表示这种功能。

含有几个附加程序的原始BLAS不列在表1中。这些最初是一些混合精度点乘程序。因为我认为它们在特殊情况时的值，不能调整它们带进的加大的混淆，所以我在讨论中把它们略去。

除了转动程序外，BLAS程序的自变量是一致的，且便于记忆。它们能分成两类：

单矢量程序：NAME(N,{A},X,INCX)

双矢量程序：NAME(N,{A},X,INCX,Y,INCY)

这里{A}通常含有这种意义，即这个自变量不是经常要求的。特别，A常常是一个标量，它仅用在SCAL和AXPY的程序中。X和Y是将要进行运算的长度为N的矢量、INCX和INCY是X和Y元素间的贮存增量。这个概念，以承认在大多应用中INCX和INCY是两件事情中的一个，是最容易被理解的。当运算矢量或两维数组各列时，有INC=1。当运算两维数组各行时，INC被设定为数据的第一维。一个简单例子可帮助澄清这点。假定要计算$b=Ax$，其中$b\in R^m$，$x\in R^n$及$A\in R^{m\times n}$。下面是采用在BLAS中进行这种做法的一段Fortran程序：

```
      REAL  A(N1A,N),B(M),X(N)
               ⋮
      DO 100 I=1,M
            B(I)=SDOT(N,A(I,1),N1A,X,1)
  100 CONTINUE
```

点乘程序以行式进入A，且将x当作为一个简单矢量。

对于BLAS的其他详细资料，读者请参见Lawson等文章(1979a,b)。对于BLAS应用的进一步例子见Dongarra等文章(1979)。

在我的意见中，有三种非常基本的运算，它们没有包括在由Lawson等提出的BLAS的方法中。这些是矢量运算

$$y \leftarrow x+y$$
$$y \leftarrow y-x$$
$$y \leftarrow x-y$$

这里箭头←意思是右边的目标修改左边的目标。所有这三种运算都能用AXPY(第三个还要求调用SCAL)执行。但由于AXPY 应用一个浮点乘法，这种方法在$a=\pm1$的特殊情况中是不必要的，所以上述方法不是非常有效的，作为本书计算机程序的一部分，我已经编入这些特殊运算的程序。这些都是任何人能在短时间内编出的相对简单的程序，我将它们编入，纯粹是为了读者方便，因为它们是如此的简单。所以只编入单精度程序，双精度和复形式，作一些简单的变化，能很容易得到,即DAXPY和CAXPY。编入的程序分别命名为SXPY,SYMY和SXYM，所有这些都像SDOT,SCOPY等一样，有相同的自变量。

3. 非稀疏矩阵的运算

3.1 基本运算

基本矩阵运算有三种：加法,乘法和转置。前面两种用BLAS来完成，是不太重要的。上述两种简单算法都能用不多于三行Fortran可执行编码来完成，当算法不是十分明显时，我编入执行这些运算的两个空间-节约的程序。对于两个矩阵，$A \in R^{m\times n}$及$B \in R^{m\times n}$，MTRXADD进行$B \leftarrow A+B$运算。同样，一个称作为MTRXMUL的程序，当$B \leftarrow C=A^TB$时，从$A \in R^{l\times m}$及$B \in R^{l\times n}$计算乘积$C \in R^{m\times n}$。MTRXMUL使用乘积A^TB作为一个基本运算，因为它引出一个列向算法，这种算法在虚存计算机中进行得相当快速。这两程序都是BLAS 应用的很好说明例子。我们能容易地应用BLAS，设计不同风格的其他加法和乘法算法。我希望我提供的各种形式，能作为这个过程的一个先导。

由于BLAS COPY程序简单应用时，贮存量不是关键，所以进行矩阵转置并不重要。对于大的、几乎是全满的数组，宁愿进行适当的转置。我编入一个称作为MTRANS的程序，它就是进行这种单精度数组的运算。用一个例子，就能最好地看清它的应用：

```
REAL A(M,N)
    ⋮
CALL MTRANS(A,M,N)
```

对MTRANS调用之后，数组A将被贮存在计算机记忆器中，好像它同原来那样被声明为REAL A(N,M)。这包含有这种意思，即，由于经过转置后，实际贮存的是与声明的不一致，因而在后面的计算中，使用A的成份时必须小心。要记住的规则是，如果MTRANS应用于一个数组，则那个数组不应当加上脚标，除非它以可变的维数传到另一个子程序中。有两个不同的办法第一是Fortran EQUIVALENCE，但我个人的意见是，我认为这能产生颇不灵敏的编码，因而它应当避免。第二是，从不明显地声明矩阵是一个两维数组，而仅仅应用一维数组，且让程序内部计算脚标。在某些方面，这是一个具有Fortran数据结构限制的、有较好的编写程序风格，但我的经验是，由于我们被迫去做我们自己的控制变量计算，因而这会埋下更多的误差。关键性的事情是，采用这三个方法中任何一个，使用MTRANS的任何编码的主要要求是大量的解释评论。

在用矩阵进行计算机算法时，存在两个另外的基本运算，这两运算，为了某种理由在矩阵算法讨论中，几乎常常被忽略。我认为，其理由是，这两运算全是与线性代数无关的、纯粹的计算机任务。第一个是初始化。为此目的，我提供一个称作为MTRXO的程序，这个程序初始化一单精度数组为零值。它的功能不值得作进一步评述。第二个是贮存在矩阵中数据的输入与输出。我已经发现在三种情况中矩阵I/O程序是一个有价值的工具。

（i）复杂的矩阵算法常常能分解成一系列的、具有很好给定

主要中间结果的不同任务。在这些情况中，可能宁愿写出一系列通过临时文件进行交换的单个程序，而不写出包括从头到尾的全部工作、最终的包罗万象的大程序。过滤器和流水线的Unix概念是促进这种方法的一个简单例子。

(ii)矩阵输入和输出能用来进行一种简单类型的、手操纵的虚拟存储器。即一个矩阵能被写到一个临时文件中，给予贮存之后，能用于另外计算。当再次需要这个矩阵时，能读到存储器中。

(iii)一个数组的内容常常需要打印出来，不然就以机器可重新得到的形式贮存起来。这些数字既可以是某一计算的最终结果，也可以是需要调试的某一中间结果。打印代表一个特殊的问题，在这问题中，结果需要是人可读认的。在这情形中，一个大的矩阵最好以多块形式按列打印出来。

我已经完成的 I/O 程序的功能说明，综述在表 2中。所有都限定为单精度数组，但转换到另外数据结构将是不重要的。为了保证输入和输出模块之间的兼容性，有关的程序，通过应用不同入口点，强使它们联结起来。例如，MTRXIB编码由下列构成：

```
SUBROUTINE MTRXIB(A,…)
      ⋮
RETURN
ENTRY MTRXOB(A,…)
      ⋮
RETURN
ENTRY MTRXTOB(A,…)
      ⋮
RETURN
END
```

当后面的计算，用转置进行是更有效时，则转置过的输出程序(MTRXTOB和MTRXTOE)是有用的。这能用来避免后面调用

MTRANS，或一等效的程序。

3.2 组成块体的矩阵算符

有些运算对构成更多的复矩阵运算是基本的，像矩阵逆。这里考虑到的运算不是完备的，但它们，对我来说，已证明是有价值的。

Householder 变换，对某些矩阵逆算法是一个有价值的基本工具。往往也称这些变换为基本反射器，因为反射器从几何上说明了变换要做的内容。由一单位长度($u^Tu=1$)矢量u，能构成这个矢量的Householder变换，定义为$H=I-2uu^T$。从几何上来说，H的效果是通过一个以u为法线矢量的超平面，来反射坐标系（为了理解这点，一个有用的练习是计算一个两维空间中的具体例子。因而反射"超平面"简化到通过原点的一条线）。

表2 矩阵输入-输出程序

程序名	功能
MTRXIB, MTRXOB	用Fortran无格式I/O读入(I)和写出(O)一矩阵
MTRXTOB	MTRXOB的等效程序，但写出矩阵的转置
MTRXIE, MTRXOE	用格式I/O，(以E格式)读入(I)或写出(O)矩阵
MTRXTOE	MTRXOE的等效程序，但写出矩阵的转置
MTRXPR	在一线性打印机上，以适合于硬拷贝的列式块体形式输出矩阵

Householder变换的可用性来自它们有预期的数值稳定性(Lawson和Hanson，1974，pp，83—89)。由于这种原因，因而Householder变换是大多数QR和奇异值分解算法的基础(见下面)。Lowson和Hanson(1974)发表过一个称作为H12执行Householder变换的Fortran 程序。读者在那个程序中，能知道这种算法的详细文

件。对于如何应用Householder变换的进一步说明，读者请参考Lowson和Hanson的书及另一本由Stewart(1973)写的专著。

BLAS 包含有另一种类型组成块体的Fortran 编码。这些执行称作为Givens转动矩阵和修正Givens转动矩阵的(表 1)平面转动程序。这两个程序，在功能上是等同的。修正过的形式使用一个由Gentleman(1973)设计的、不同的算法，这种算法减少了运算量，且从结果上说，通常是优先的算法。从功能上看，一个平面转动是这样形式

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cos\theta & & \sin\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & -\sin\theta & & \cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

如果两个$\cos\theta$项，占有了 i 列和 j 列，则Q的影响是将坐标系在(i,j)平面上转过一个角度θ。平面转动的主要应用是在矩阵正交分解的算法中。几乎应用Householder变换的任何算法，都具有应用平面转动的等效性。另外，我已经发现，平面转动对简单的三维直角坐标系的变换是有用的。

我认为投射线是值得考虑的一个最后组成块体。我已经发现，投射线在地震走时残差分析中是一个有价值的工具。对于投射线的三个不同应用，读者请参看 Jordan 和 Sverdrup (1981), Pavlis(1984)及Pavlis和Hokanson(1985)等的文章。所有这些应用，中心围绕联合地震定位问题。Jordan和Sverdrup应用过投射线推导出他们称作为震源分解定理的内容。这说明，当地震群被联合定位时，群的绝对位置(震中)对于群内每一地震的相对位置，解耦到一阶。Pavlis和Hokanson(1984)对此采取另一个步骤。应用投射线将联合定位问题分成两个不同的运算。震群的绝对位

置只能用外边的信息修正，因为震中分解定理表明，这种信息基本上无法从给定数据中得到。我们指明过，这种外边信息如何能通过应用投射线而被吸收到解中去。另一方面，相对位置能直接从实际资料中得到。但通过适当的投射线与外边资料混合时，相对位置会是更精确。

在Pavlis(1984)的文章中，我也曾将投射线用于一个有关的、但稍有不同的应用中。两次不同地震的残差，一般说，不能作比较，因为两次地震的残差与其定位过程如何互相作用上有差异。在我的1984年文章中，我推导过一投射线，它允许我们仅仅对由相同的两次事件的两个地震得来的残差部分作比较。

投射线通常在线性代数教科书中讨论，但我不知包含有计算它们的任何算法的任何软件包。投射线有如下定义：如果 $v_i \in R^n$ $(i=1,2,\cdots,r)$是一组正交矢量(即$v_i^T v_j = \delta_{ij}$)，则

$$P = \sum_{i=1}^{r} v_i v_i^T \tag{2}$$

是一个称作为正交投射线的运算符。P有一个重要的配对，定义为

$$P_c = I - P \tag{3}$$

且称作为补充投射线。这个名字来自这样的性质，即当给定某一$b \in R^n$，Pb是b在由基矢量v_i张成的R^n中，r维子空间上的投影。对照着说，$P_c b$是b在R^n中$(n-r)$维子空间，它垂直于由P定义的子空间上的投影。这个子空间称作为正交补充子空间(Ben-Israel和Greville, 1974, pp. 63—76)。正交投射线与最小二乘方问题有紧密相关。即，如果用最小二乘方法求解方程，对$A \in R^{m \times n}$，$b \in R^m$和$x \in R^n$情况，有

$$Ax = b \tag{4}$$

则得到解有

$$\hat{x} = A^+ b \tag{5}$$

其中A^+是伪逆(Lawson和Hanson, 1974, pp. 36—52)。在满秩情况，超定问题A^+能用所谓正规方程，如$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$来计

算。否则，它必须要用某一另外的方法计算，这些方法中某一些在下面讨论。

一个一般矩阵A与4个基本矢量空间有关，给定如下（Ben-Israel和Greville，1974，p. 14）：

$$\left.\begin{aligned}R(\mathrm{A})&=\{y\in R^m:\ y=\mathrm{A}x\text{当}x\in R^n\}\text{是A的阶},\\N(\mathrm{A})&=\{x\in R^n:\ \mathrm{A}x=0\}\text{是A的零空间},\\R(\mathrm{A}^T)&=\{x\in R^n:\ x=\mathrm{A}^Ty\text{当}y\in R^m\}\text{是}\mathrm{A}^T\text{的阶},\\N(\mathrm{A}^T)&=\{y\in R^m:\ \mathrm{A}^Ty=0\}\text{是}\mathrm{A}^T\text{的零空间。}\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

这些子空间的每一个都有一个有关的正交投射线，我将分别地将它们写成$\mathrm{P}_{R(A)}$，$\mathrm{P}_{N(A)}$，$\mathrm{P}_{R(A^T)}$和$\mathrm{P}_{N(A^T)}$。伪逆解式(5)与这些投射线有如下关系（Ben-Israel和Greville，1974）：

$$\begin{aligned}\hat{b}&=\mathrm{A}\hat{x}=\mathrm{P}_{R(A)}b\\r&=b-\mathrm{A}\hat{x}=\mathrm{P}_{N(A^T)}b\\\hat{x}&=\mathrm{P}_{R(A^T)}x\\x-\hat{x}&=\mathrm{P}_{N(A)}x\end{aligned}$$

进一步，有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{P}_{N(A^T)}&=\mathrm{I}-\mathrm{P}_{R(A)}=[\mathrm{P}_{R(A)}]_c\\\mathrm{P}_{N(A)}&=\mathrm{I}-\mathrm{P}_{R(A^T)}=[\mathrm{P}_{R(A^T)}]_c\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

这里脚标 c 是用来强调与式(3)的关系。方程式(7)是重要的，因为它表示：零空间投射线是容易由有阶投射线构成。投射线的原来定义式(2)给出一个根据奇异值因子分解计算它的算法。即任何矩阵$\mathrm{A}\in R^{m\times n}$常常能分解成

$$\mathrm{A}=\mathrm{U}\Lambda\mathrm{V}^T\qquad(8)$$

这里$\mathrm{U}\in R^{m\times r}$和$\mathrm{V}\in R^{n\times r}$是正交矩阵，它们的列分别张成$R(\mathrm{A})$和$R(\mathrm{A}^T)$。$\Lambda\in R^{r\times r}$是一个对角矩阵，它们$r$个非零对角元素形成一组称作为A的奇异值正数。它们可以当作为一种类型的本征值。U和V的各列同样可当作一广义的本征矢量组，且分别称作为左侧和右侧奇异矢量（Lanczons，1961）。U和V能用来构成这些投射线，为

$$
\left.\begin{aligned} P_{R(A)} &= UU^T \\ P_{R(A^T)} &= VV^T \end{aligned}\right\} \tag{9}
$$

因而，零空间投射线能用式(7)构成。

我已经完成了两个计算由式(2)和(3)定义的投射线的程序。我分别称它们为 PROJECT和COMPPRO。PROJECT 是以式(9)为基础。COMPPRO是以式(9)和式(7)为基础。两者都用BLAS和风格上类似于Lawson和Hanson(1974,p.57)的Householder变换算法的外积算法。

3.3 适定系统的矩阵反演

对于形式为

$$
Ax=b
$$

非稀疏方程的解，其中 $A\in R^{n\times n}$，我知道没有比由 Dongarra 等(1979)发表的、称作为LINPACK，软件包更好的源程序。LINPACK是以BLAS 为基础且含有执行实际上所有主要现代反演算法，没有必要作进一步讨论。读者请参考由Dongarra等写的出色的专著，该专著将这种编码写成文件，且给出许多有关它的使用的实际建议。

3.4 奇异值分解和广义逆

许多地球物理反演问题的解法集中围绕着形如式(4)的方程，这种形式的方程，至少有 4 种途径出现在地球物理反演问题中。

(i)在离散线性问题中，有与 n 个模型参数有关的 m 个数据，它们构成

$$
b_i=f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j \tag{10}
$$

出现这类方程问题的例子是折射分析中的时间项方法(Willmore和Bancraft, 1960)。

(ii)在离散非线性问题中，给出一组类似于式(10)的方程，

但$f_i(x)$不是参数x的线性函数。然而求解这些问题的一种方法是将它们处理为一系列的线性问题。这用f_i对某一初始假设x_0的一阶展开式来完成，它给出

$$r_i=b_i-f_i(x_0)\approx\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j \tag{11}$$

方程式(11)和(10)是类似的，有b_i等效于r_i，A_{ij}等效于$\partial f_i/\partial x_j$，及$x_j$等效于$\delta x_j$。方程式(11)很明显属于一种线性化。对地震学家来说，这类问题最熟知的例子是用Geiger方法的震中定位。

(iii)在连续线性反演问题中，x变成一个描述地球介质某一物理特性为空间位置的连续函数$m(r)$。在这种情况中，我们写出

$$b_i=\int_{\text{volume}}G_i(r)m(r)\mathrm{d}V \qquad i=\{1,2,\cdots,m\} \tag{12}$$

$G_i(r)$类似于积分方程理论(Parker，1977)中的那样，称为“数据核”。这类问题的一个例子是由衰减测量估算地球内部地震Q值的问题。

(iv)大多数地震学反演问题，专门当作为连续非线性问题。在这种情况中，有

$$b_i=F_i[m(r)]$$

其中，泛函F_i是$m(r)$的非线性函数。处理这些问题的最普通方法是方程式(11)的连续的等效公式。即，如果将F_i相对于模型的某一初始假设$m_0(r)$展开成一个Taylor级数的泛函等效式，且只保留零阶和一阶项，因而得到有如下形式的一组m个方程

$$r_i\doteq b_i-F_i[m_0(r)]=\int_{\text{volume}}G_i(r)\delta m(r)\mathrm{d}V \tag{13}$$

右边是偏导算子的函数空间的等效关系，称作为Fréchet导数，且G_i被称作为Fréchet核。$\delta m(r)$是一模型扰动，定义为$\delta m=m(r)-m_0(r)$。作为一个实例，走时和地震速度与这类方程有关(Backus和Gilbert，1969)。

我相信，这不会普遍地相适合，计算上，会出现离散和连续

反演之间小的实际差异。在连续问题中，数据核$G_i(r)$极少是显化地知道，且必须数值地进行计算。例如，在 Backus 和 Gilbert (1969)的总体地球结构P波残差反演中，G_i是用一个在一系列格点上离散化了的模型，进行数值确定。这意思是在式(12)中的积分近似为(除了符号稍有不同外，式(13)也是类似的)

$$b_i \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} G_{ij} W_{jk} m_k \tag{14}$$

这里G_{ij}和m_k是在一系列n个位置为r_j的求积点上的$G_i(r)$和$m(r)$值。权重W_{jk}给出相应的求积系数。对于一集m个观测值，式(14)能以矩阵形式写成为

$$\mathbf{b} = \mathbf{GWm} \tag{15}$$

对于任何合理的求积规则，矩阵W是正定的。因而式(15)能重新写成为

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$$

其中 $\mathbf{A} = \mathbf{G}\sqrt{\mathbf{W}}$及$\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{W}}\mathbf{m}$，矩阵$\sqrt{\mathbf{W}}$称作为W的方根(Ben-Israel和Greville, 1974, p. 124)。

以最简单一维求积规则，W是对角的(立方样条法是一明显的例外)。例如，对于有一集n点系列，点间隔为Δx的梯形求积规则，有$W_{ij} = w_i \delta_{ij}$，这里，w_i在$i = \{1, n\}$情况，为$\frac{1}{2}\Delta x$，而在其他情况，则为Δx。当W是对角时，计算$\sqrt{\mathbf{W}}$并不重要。对二维或三维求积规则，当应用均匀象元或块体时，W仅在最简单的情况才是对角的。然而更复杂的求积方法，通常还会引导到这样的W，即在给定的结构中，它是稀疏的。如果W不是对角的，则我知道的唯一一般计算$\sqrt{\mathbf{W}}$的方法，要应用W的本征值-本征矢量分解，但也可能存在我不知道的、更为不同的方法。在任何情况中，从计算观点看，主要之点是，不论离散的或连续的反演问题，都面临着需要解同样的基本方程组式(4)。

通过应用合适的加权方法，由式(4)可得到一宽范围的解。即，如果给定一组正定矩阵$\mathbf{W}_b \in R^{m\times m}$和$\mathbf{W}_x \in R^{n\times n}$，则式(4)能被

转换到

$$By=c \tag{16}$$

其中

$$B=W_bAW_x,\ y=W_x^{-1}x,\ c=W_bb \tag{17}$$

式(16)的伪逆解得出

$$\hat{y}=B^+c \tag{18}$$

或者

$$\hat{x}=W_xB^+W_bb \tag{19}$$

由式(19)给定的解是特殊的，在这种情况中，这是使$\|r\|W_b=[r^TW_b^2r]^{1/2}(r=b-Ax)$和$\|x\|w_x=[x^TW_x^{-2}x]^{1/2}$为最小时的唯一解(Ben-Israel和Greville，1974，pp. 103—127；Lawson和Hanson，1974，pp. 180—188)。注意，当$W_b=I$及$W_x=I$时，这简化到一个简单的最小二乘方解。对于地震学家来说，参照地震定位，W_b的作用最容易理解。对角矩阵W_b是用在我知道的每一定位程序中。这些数字称作为权重。它们由不同的准则推得的，包括到达质量，距离加权，残差加权及方位加权。W_x的影响是更微妙。在满秩的最小二乘方问题中，W_x只是由于改变B与A相比的条件数，而间接影响解(Lawson和Hanson，1974，pp. 185—188)。这样的例子再一次来自地震定位。为了与空间坐标一致起见，最普通的是将震中参数的发震时间标定为具有长度单位。在这种情况中，W_x是对角矩阵，当为空间坐标时，对角元素等于1，而当为发震时间时，等于$1/v$，这里v是某一种代表性的速度(注意，在这种情况中，W_x^{-1}也会是对角的，但发震时间分量将是v)。对于有很好约束的解，这没有影响。但是，由于标定过的方程几乎是常常比相应的没有标定过的方程有更好的条件，因而这有助于改善数值稳定性。

对于欠定问题，或者混合定最小二乘方问题，W_x对解会有控制性影响。Tarantola和Valette(1982)指出过，对这类解的这种影响能用一先验的模型协方差来解释。

在连续反演理论中，等效于W_x的运算子给定了Backus(1970)称作为消除的内容。最通常的例子是积分消除(Backus和Gilbert，1969；Chou和 Booker，1979)。在一维情况 W_x 是具有下三角元素均为 1 的下三角形矩阵，及有

$$W_x^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

三维形式依赖于表示模型求积方法的详细情况。

式(18)或式(8)中的伪逆可用几种方法计算。但是，也许最可靠的要算奇异值分解，它的形式由式(8)给出过，由那个分解知，伪逆A^+能由下式计算

$$A^+=V\Lambda^{-1}U^T \tag{20}$$

B^+也能用同样的方法进行计算，但因式分解，当然会得出不同的数，除非W_a和W_b是单位矩阵。Λ^+给定为

$$\Lambda^+=\begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r^{-1} \end{bmatrix} \tag{21}$$

这里$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r\}$是A的奇异值。伪秩$r$是一个难于确定的量。如果奇异值依递减的顺序排列，使得 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_r$，则由式(21)得到：最小奇异值引起试验误差的最大放大率。能够看到；降低伪秩r，常常会减小由于测量误差引起的解的不定性，但唯一要牺牲数据的分辨能力。不存在固定不变的规则来处理小的奇异值。如何用设置 r 的方法，掌握小的、但有意义的奇异值是一个"困难的且没有解决的问题。"(Dongarra等，1977，p. 11、23)。我已经发现，在应用伪逆解问题中一个有用的实际方法，是寻求

某一 r 值范围的解，并选择一个解使能得到解的不定性和分辨能力之间有一合理的折衷。这意味着，如下做法是明智的：即将进行奇异值分解的任务，从构成一个解的任务中分离出来。我已经发现，一个有用的方法是应用一个程序，这个程序的唯一目的是构成A，并计算A的奇异值分解。当这个任务完成时，MTRXOB（或MTRXOE）被用于将这些结果存放到一个磁盘文件中。因而，其他的程序能读入SVD运算的结果，且很容易产生许多几乎是无意义的解。所要求的唯一计算是一些简单的矩阵乘法。而且，这个分析不限于应用于一个伪逆。一旦奇异值和奇异矢量有效时，我们就能很容易地构成一组阻尼解（Lawson和Hanson，1974，pp. 188—194）。分辨函数（Backus和Gilbert，1968，1970）同样容易地可计算。

许多奇异值分解算法在公共域是有效的。在本书中，提供两个不同的子程序。第一个是SSVDC，它以LINPACK的一部分出现（Dongarra等，1977）。第二个称作为SVDRS。这是发表在Lawson和Hanson的专著中（1974）。两者都用同样的基本算法，这种算法最初由Golub和Reinsch发表的（1970），他们从理论方法到实践采用SVD，这是一个革命性的Algol方法的派生物。我个人的偏见是大大喜爱SVDRS，因为它比SSVDC少用存贮。与此相应，不需显式计算U。代以之，Lawson和Hanson认为，它很少注意到U的实际形式，但整个方法实实在在需要的是与资料矢量的乘积 $U^T b$。因而SVDRS只计算 $b \leftarrow U^T b$，这是为求解式(5)所需要的一切。这个限制不像它第一次出现时那样严格，但是，与该算法允许 b 是一个数组一样严格。因此，如果要求显式地计算 U^T 时，只能让 $b = I \in R^{m \times m}$，且SVDRS将用 U^T 重写在数组 b 上。我已经发现，这种算法有用于执行Pavlis和Booker称之为一个非零变换的内容。非零变换已经证明，在应用地震到时确定地球结构的问题中是有用的。这个问题变成没有它而难以处理的，因为加到资料组中的每一个地震，不单增加了必须要解的方程数目，而且也增加了四个

未知数(震中坐标)。这种方程组的强制解变成为完全难以处理的，除非用来计算解的地震数目保持很小。非零变换允许将震中位置，从速度-反演过程中分离出来，以防止发生这种问题。这允许较大的资料组用在反演中。对于这种技术的应用实例，读者参见由 Thurber 和 Aki 写的一篇近期评论(1987)。我已经应用过的、基于SVDRS的算法，在数值上比类似的、由 Spencer 和 Gubbins (1980)独立发明的方法更要稳定。SVDRS 应用 Householder 变换和Givens转动来计算U和V，像上面注意到的那样，有极好的数值稳定性。Spencer和Gubbins 应用一个正规方程算法，它的数值上不是那么稳定(Stewart1973, pp.221—222)。

我也提供两个紧密地与SVDRS相连的简短方法，称作为GISOL和NUMBIG。GISOL应用SVDRS的输出来计算在式(5)中给出的伪逆解。为了形成这个解，它调用函数NUMBIG，这个函数根据用户给定准则，建立伪秩r。即当给出一个确定的最小允许值λ_i时，NUMBIG得到r。值得指出，因为r将与如何标定A有关，因而在绝对意义上说，无论何时给出这个截断，通常都会被告知是病态。最好给出截断为

$$\lambda_{中断}=\rho\lambda_{max}$$

其中λ_{max}是A的最大奇异值(对于SVDRS，这是λ_1)。ρ选取为$\varepsilon<\rho<1$，这里ε是与进行本计算的计算机精度有关的单精度浮点(对于32字节的计算机，$\varepsilon\approx10^{-6}$)。以这种方法使用$\rho$建立截断，这个截断是系统的条件数来确定解，而不是某个任意数。

4. 稀疏矩阵反演算法

4.1 条带矩阵

一个矩阵，在它对角线周围的少数行和列不为零时，则这矩阵是成条带的。要求条带矩阵反演的两个例子是立方样条内插公

式和有限元分析编码。LINPACK包含有几个用来求解条带方程组的程序。读者要知道详细情况，请参见Dongarra等文章(1977)。

4.2 稀疏最小二乘方反演

近年来，随着对速度的走时反演要求大的稀疏方程组进行反演的认识，稀疏线性方程解法已经提高到极重要的地位。走时反演有很多与X射线计算机层析(CAT)扫描相同处。对这个事实的认识直接导致"地震层析"的最新学科。

稀疏方程组在层析中，是从基本假设或射线理论产生的。在这种假设下，从震源r_0到接收处r的走时是

$$t_i=\int_{\Gamma_i}u(r)\mathrm{d}s \tag{22}$$

这里Γ_i代表联结震源和接收处的射线路径，u是慢度，它是r的函数。因此，t_i可认为是r_0和r之间的线积分。现在假设，给出一块地球体积，将它分成N^3个立方体。如果用这些N^3个块体中的每一块的速度，作这个体积的速度参数化，且组成形如式(22)的m个方程，这样面临要解$m\times N^3$个方程的方程组。但是，能够预期这些方程通常是颇为稀疏的。每一组资料由一个线积分构成，与$u(r)$相关，这个积分对于每条射线来说，只是通过大约N个块体。因此，要被求逆的矩阵中，大约只有$N^{-2}\times 100\%$是非零的。对于任何合理大小的N，要求解的矩阵一般包含99%以上零元素。

X射线CAT扫描几乎通常使用一种称作为积褶方法的技术，这种技术，对于执行Radon反变换(Herman，1980，pp. 118—179)，基本上是一个数值稳定的算法。不幸，由于大多地震层析试验的资料收集的几何性太不均匀，以及积褶法假定直线射线路径(Pavlis，1986)，所以积褶法一般是不适合于地震层析。作为一个结果，地震层析一般造成为一个大尺寸的稀疏矩阵-反演问题。

我知道有5种基本类型的算法，这些算法已经证明在用最小

二乘法解大的稀疏方程组是有用的。

（i）代数重建技术(Herman，1980，pp. 180—205；及那里所列的参考文章)已经被 Peterson 等(1985) 成功地应用到钻孔地震层析中。

(ii)迭代重建技术(SIRT)(Herman，1980，pp. 206—221)，这是求解有正定矩阵的线性方程组 Richardson 法的一个变化形式，已经成功地应用在X射线的层析中。Olson(1987) 叙述一个较大的变化方法，它应用Chebyshev多项式来加快收敛。

(iii)Dines和Lytle(1979)提出过一种算法，在效果上，类似于代数重建技术。但算法是不相同的，有不同的收敛性质 (Nolet 1985)。这种算法已被加州理工学院小组广泛应用 (Clayton和Comer，1983；Fawcett和Clayton，1984；Humphreys等，1984)。

(iv)稀疏系统的共轭梯度技术已经由Paige和Saunders (1982 a,b)用来进行求解阻尼最小二乘方问题。

（v）有可能用Lanczos算法(Nolet，1985)来进行奇异值分解的稀疏形式。

关于地球物理应用中，这些算法的有关优点与缺点是很少知道。我的意见是，需要有更详细的研究来做这方面工作。我知道的唯一实实在在的比较研究是由Nolet(1985)做的。他比较过上列算法中的最后三个，且发现Paige和 Saunders(1982b)的共轭梯度法，在执行过程中是优越于他试验过的另外两种算法。他也叙述过计算一些应用相同的稀疏矩阵算法的分辨函数算法。这是一个重要的发展，因为根据上面算法中任意一个所进行求解的一种代价是，不能直接计算分辨率。然而，计算分辨率函数的 Nolet 算法要求，有计算单个解所要求的同样计算量。必定还有额外计算量，但不会以它的出现而成为一个严重的问题。在一篇近期的文章(Pavlis，1986)中，我用过基于SVDRS的、强制方法来求解 550×400层析方程组。在一台Vax计算机中，这要求稍多于4个小时的CPU时间。由我的一个学生，用Paige和Saunders算法做的

一些新近计算，在同一台计算机上，解一个1500×1500方程组，只需要一分钟的CPU时间，我估计，同样的方程组，如用SVDRS求解，则会需要几天功夫。用这种时间差，人们能计算大量分辨率函数，因为这远远低于用强制解的代价。

我打算将Paige和Saunders算法(1982a，b)放在本书中。我知道，没有另外可容易地用来求解公共域稀疏-矩阵最小二乘方方程的解法。对于这种方法的详细情况，请读者参见上面提到的参考文章，它们可作为极好的文献。

4.3 序列堆积

序列堆积(Lawson和Hanson，1974，pp. 208—224)对于求解大的最小二乘方问题是一种有用的算法，其中$m \gg n$。由Lawson和Hanson给出的算法不真正是一个稀疏-矩阵算法。我在这一节中讨论它，因为我已经发现，在求解多个地震定位问题中，它是一个有用的算法。对于联合地震定位中，需要求解的方程是非常稀疏的一种特殊结构。这种结构能像Pavlis和Booker(1983)所说的那样，加以利用。我们的方法集中围绕在序列堆积和非零变换(Pavlis和Booker，1980)。在本章中，我限于像Lawson和Hanson叙述的那样，对序列堆积进行讨论，因为他们叙述的算法有更一般的应用。对于在多次地震定位中，如何能应用序列堆积的详细内容，请读者参见Pavlis和Booker的文章(1983)。

在$m \gg n$情况下的最小二乘方问题，当A是非常大时，贮存整个矩阵m可能变成为不可行的。而序列堆积的想法是：这种贮存也完全是不必要的。为了明白这点，将A和b分开，而得到

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_q \end{bmatrix} [x] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} \qquad (23)$$

这是有用的，其中$A_i \in R^{m_i \times n}$及$b_i \in R^{m_i}$，及

$$\sum_{i=1}^{q} m_i = m$$

m_i的大小是一个选择量。它能取像1那样小，或者足够大，使得q是一个小的数。求解最小二乘方问题的一种方法是通过正规方程

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b \tag{24}$$

不难得到

$$A^T A = \sum_{i=1}^{q} A_i^T A_i, \quad A^T b = \sum_{i=1}^{q} A_i^T b_i \tag{25}$$

序列堆积的一种方法，是由式(25)想到的。我们能像在式(25)中给出的那样，简单地堆积 $A^T A$和$A^T b$。只需要贮存$A^T A$, $A^T b$, A_i和b_i。这种算法的问题是熟知的，即正规方程解式(24)的数值稳定性很差。而由Lowson和Hanson所叙述的算法，对简单的正规方程近似却有极佳的数值稳定性，且保持有同样的贮存经济的优点。应用式(25)QR因子分解化的等效式，来进行这种堆积。QR因子分解化应用这样的事实，即任何矩阵A都能分解为

$$A = QR \tag{26}$$

其中$Q \in R^{m \times m}$是正交的，而$R \in R^{m \times n}$是上三角形的。因而方程式(4)能被解得为

$$\hat{x} = R^+ Q^T b \tag{27}$$

如果R不是奇异的，则R^+能用一个简单的反代换算法（Lawson和Hanson, 1974, pp. 63—66)进行计算。如果它是奇异的，则R^+能用奇异值分解给予计算。为了用序列堆积来进行这个过程，Lawson和 Hanson 所叙述的算法，应用 Householder 变换来构成一组上三角矩阵R_i($i=1,2,\cdots,q$)，它以式(26)$R_q=R$而终止。这种算法只要求容纳上三角矩阵R，最大的A_i以及最大的b_i的空间。为了贮存矢量$d \in R^{n+1}$，需要附加贮存。d的前面n个元素容纳乘积$Q^T b$。因为R的下边$m-n$行，用这种算法，强取为零，所以仅需要前面n个。$Q^T b$的这些$m-n$个分量是不为零的，但一般说来，单个分量

是不重要的。因此d的第$(n+1)$个元素是用来贮存这些数的平方和，它能表示为残差平方和。对于这种算法的详细说明，请读者参见Lawson和Hanson文章(1974)。

Lawson和Hanson(1974, p.210)给出了他们标记为SEQHT、进行QR因子分解化的序列堆积的一种算法的简要轮廓。我已经用收入在本书发表的软件中同样的名称的 Fortran 算法执行过这种算法。

第二章　矩张量源的辐射

B. L. N. Kennett

（澳大利亚国立大学地球科学研究院）

1. 引　　言

震源的一个方便且经济的叙述，即当作预期的弹性应力状态的偏离来描述。这种差异可以用一个矩张量密度$m_{ij}(x, t)$代表（Backus和Mulcahy，1976），它对于任何不是由外部作用引起的震源都将是对称的。

安置在体积V内的一个震源在x点产生的地震位移为

$$u_k(x, t)=\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_V \mathrm{d}^3\eta\frac{\partial G_{kp}}{\partial \eta_q}(\eta,\tau;x,t)m_{pq}(\eta,\tau) \qquad (1)$$

其中$G_{kp}(\eta,\tau;x,t)$是介质的Green张量。对于一个位置接近h的集中源，我们将Green张量作相对于点h的Taylor展开，则写成

$$u_k(x,t)=\int_0^t \mathrm{d}\tau\frac{\partial G_{kp}}{\partial h_q}(h,\tau;x,t)M_{pq}(\tau)+\cdots \qquad (2)$$

这里，矩张量是

$$M_{pq}(t)=\int_V \mathrm{d}^3\eta m_{pq}(\eta, t) \qquad (3)$$

高阶项代表原来矩张量密度分布的连续多项式矩的影响，且通过比较观测与理论地震图，来改进震源位置的方法中，已经利用了高阶项（Dziewonski和Woodhouse，1983）。对于小震源来说，参考点的位置一般将是震中，但对于扩展断裂情况，考虑到扰动中心，得到一个改进的表达式。

用在式(2)中的矩张量的给定形式与应用有关。为了考虑震源辐射本身，方便的是设想，点矩张量源位于P波速度为α_s，S波速度为β_s及密度为ρ_s的均匀介质中。在那种情况，对一点x的位移场的远场贡献与矩张量分量的随时间变化率有关，分别对P和S波有：

$$u_k^P(x,\ t)=\frac{1}{4\pi\rho_s\alpha_s^3}\ \frac{1}{R}\gamma_k\gamma_p\gamma_q\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{R}{\alpha_s}\right)\quad(4)$$

$$u_k^S(x,t)=\frac{1}{4\pi\rho_s\beta_s^3}\ \frac{1}{R}(\delta_{kp}\gamma_q-\gamma_k\gamma_p\gamma_q)\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{R}{\beta_s}\right)\quad(5)$$

这里$R=|x-h|$，γ_i是x相对于h的方向余弦。辐射花样是与几何项相互作用及矩张量分量有关。P辐射相当于矩张量的径向分量，而S辐射则相当于中心在h的球坐标系中的切向分量和。

本章里，将给出由一点源，对体波和面波产生的辐射结果作摘要叙述。采用矩张量描述，且表明如何能用通常的断层面叙述来产生这个表达式。甚至当给出一个震源的确定表达式时，往往也是难于设想辐射花样的形式。因而要说明，怎样生成两个不同的图象处理，使得能够估算三维中的体波辐射振幅。

2. 点　源

通常遇到的点震源描述有两个。第一个是，用在一个断层上纯滑移运动产生的P波辐射时，用节平面的一个角度描述（断层发育和正交辅助平面)。第二个显得日益重要，是用矩张量的六个独立分量来对震源描述，这些分量都假定为有共同的时间依赖关系，通常，这取定为一个时间的阶梯函数，即

$$M_{pq}(t)=M_{pq}H(t)\quad(6)$$

这种假定意思是，对均匀介质，远场辐射恰好是时间的脉冲函数。对于较大的地震，两个表象都用由美国国家地震资料中心(NEIS)

发布的“初定震中”给出，且随后将这些印在国际地震中心（ISC）的报告中。

为了给定震源参数，我们必须建立一个参考坐标系。像Aki和Richards(1980)及 Bullen 和 Bolt(1985)一样，选择如下的右手系统：

x 指北方向，单位矢量为$\hat{N}$；

y 指东方向，单位矢量为$\hat{E}$；

z 向下方向(向底部)，单位矢量为$\hat{D}$。

对于弹性模数张量为 c_{pqrs} 的一般各向异性介质，在单位法线为 e 的断层面上，有单位滑移矢量 n 的剪切位错，有(零阶)矩张量表达式

$$M_{pq}=c_{pqrs}[\bar{u}]Ae_r n_s \quad n_r e_r=0 \tag{7}$$

其中$[\bar{u}]$是平均断层滑动，A是滑移面积。在剪切模量为μ_s的各向同性介质中，简化为

$$M_{pq}=\mu_s[\bar{u}]A(e_p n_q+n_p e_q) \tag{8}$$

注意，滑移矢量e和法线n在式(8)中起对称作用，因而不能从辐射特征来区分它们。

能用三个角度来说明断层系统的特征(图1)：

ϕ_s 走向方位角，从北至断层平面的曲面迹，顺时针方向度量；

δ 倾角，从水平面与走向成直角方向向下度量；

λ 倾伏角，走向和滑移矢量之间的交角。

这些都是用在NEIS和ISC出版物中的角度。为了描述相对于走向的滑移方向，还有许多另外的习惯取法：特别，垂直平面中的角度称作为俯角($\sin p=\sin\lambda\sin\delta$)，在水平平面中的角度称作为方位角($\sin t=\sin\lambda\cos\delta/(1-\sin^2\lambda\sin^2\delta)^{1/2}$)。Jarosch和Aboodi(1970)提出了不同习惯取法之间一个很好的转换说明。

在(北，东，下)坐标框架中，垂直于断层的法线有

$$n=-\hat{N}\sin\delta\sin\phi_s+\hat{E}\sin\delta\cos\phi_s-\hat{D}\cos\delta \tag{9}$$

断层走向有这样方向

$$n \wedge \hat{D} = c \sin \delta \tag{10}$$

这里，走向矢量有

$$c = \hat{N} \cos \phi_s + \hat{E} \sin \phi_s \tag{11}$$

沿着垂直平面与断层平面交线的矢量

$$d = n \wedge c = \hat{N} \cos \delta \sin \phi_s - \hat{E} \cos \delta \cos \phi_s - \hat{D} \sin \delta \tag{12}$$

矢量c和d给出断层平面上的一个正交基，这样单位滑移矢量由倾伏角λ表示为

$$e = c \cos \lambda + d \sin \lambda \tag{13}$$

这样，在原来的基上，有

$$\begin{aligned} e = & \hat{N}(\cos \lambda \cos \phi_s + \sin \lambda \cos \delta \sin \phi_s) \\ & + \hat{E}(\cos \lambda \sin \phi_s - \sin \lambda \cos \delta \cos \phi_s) \\ & - \hat{D} \sin \lambda \sin \delta \end{aligned} \tag{14}$$

用恒等式 x≡北，y≡东，z≡下，我们现在能 够计算一个剪切位错矩张量的六个独立分量，为

$$\left.\begin{aligned} M_{xx} &= -M_0(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi_s + \sin 2\delta \sin \lambda \sin^2 \phi_s) \\ M_{xy} &= M_{yx} = M_0(\sin \delta \cos \lambda \cos 2\phi_s \\ &\qquad + \sin 2\delta \sin \lambda \sin \phi_s \cos \phi_s) \\ M_{yy} &= M_0(\sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi_s - \sin 2\delta \sin \lambda \cos^2 \phi_s) \\ M_{xz} &= M_{zx} = -M_0(\cos \delta \cos \lambda \cos \phi_s + \cos 2\delta \sin \lambda \sin \phi_s) \\ M_{yz} &= M_{zy} = -M_0(\cos \delta \cos \lambda \sin \phi_s - \cos 2\delta \sin \lambda \cos \phi_s) \\ M_{zz} &= M_0 \sin 2\delta \sin \lambda \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中M_0是标量矩$M_0 = \mu_s [\bar{u}] A$。

如果矩张量是直接有效的，则只需要核对它是否遵从我们选择的参考轴形式给出的。习惯取法在体波工作中是普通的。但在长周期的简正振型研究中，基于球坐标基(r≡上，θ≡南，ϕ≡东)的一种不同习惯取法是有效力的，且 Harvard 群的解(Dziewonski 等，1983)以这种形式给出。坐标转换包括某些符号的改变：

$$
\left.\begin{array}{l}
M_{xx}=M_{\theta\theta}, M_{xy}=-M_{\theta\phi}, M_{xz}=M_{r\theta} \\
M_{yy}=M_{\phi\phi}, M_{yz}=-M_{r\phi}, M_{zz}=M_{rr}
\end{array}\right\} \tag{16}
$$

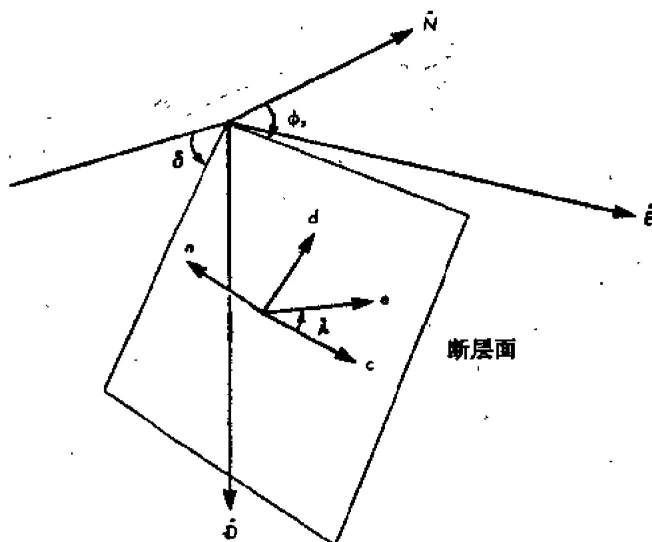


图1　由走向角ϕ_s和倾角δ定义的断层平面与由倾伏角λ定义的滑移的图形。表示垂直于断层平面法线n的方向和滑移矢量e以及辅助矢量c和d

3.　体波辐射花样

我们关心安置在一个均匀各向同性的介质中的震源，及看一下围绕着震源点h的单位球上的辐射分布。在震源球上，P波和S波辐射花样知识将总结在远场中看到的那样震源的特征。对不同的观测点，需要考虑传播路径及与自由表面的相互作用，这些将会修正在记录的地震图的特征中反映震源辐射的方式。在一些位

置上，直达能量将向下离开震源，因而，通常注意力集中在这个震源球的下半球上。在较接近的范围上，像在地方台网中，某些远场台站将被这样设置，即，使得到达这些台站的能量，在离开震源时向上，因而感兴趣的是震源球的上半球。

根据径向单位矢量 γ 的方向，对这个震源球上的点进行参数化，而γ的方向是由垂直线向上度量的离源角(i)和从北顺时针度量的方位角(ϕ)(图2)来描述。

$$\gamma=\hat{N}\sin i\cos\phi+\hat{E}\sin i\sin\phi+\hat{D}\cos i \tag{17}$$

P波将沿着γ方向辐射；为了描述S波，引进两个正交于γ的矢量：位于垂直平面上的$\hat{V}$及水平位置的$\hat{H}$，这样，将S波在震源处极性分解成SV和SH分量

$$\left.\begin{aligned}\hat{V}&=\hat{N}\cos i\cos\phi+\hat{E}\cos i\sin\phi-\hat{D}\sin i\\ \hat{H}&=-\hat{N}\sin\phi+\hat{E}\cos\phi\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

由式(4)，在单位震源球上一点处，P 波对 远 场位移的贡献给定为

$$4\pi\rho_s\alpha_s^3u^P(\gamma,t)=\gamma(\gamma_p\gamma_q\dot{M}_{pq}) \tag{19}$$

这里，矩速率分量是在时刻$t-\alpha_s^{-1}$上估算。当所有的矩张量分量都有相同的时间依赖关系时，能推导出P波辐射花样

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^P&=\gamma_p\gamma_qM_{pq}\\ &=\sin^2 i(\cos^2\phi M_{xx}+\sin 2\phi M_{xy}+\sin^2\phi M_{yy}-M_{zz})\\ &\quad+2\sin i\cos i(\cos\phi M_{xz}+\sin\phi M_{yz})\end{aligned} \tag{20}$$

为了在广义射线理论中的应用，水平 慢 度 $p=\sin i/\alpha_s$可以是一个更有用的变量(Aki和Richards，1980，方块中式9.10)。

剪切波位移式(5)必定被极化分解成SV和SH分量。在一垂直平面中，远场SV波贡献是

$$4\pi\rho_s\beta_s^3u^{SV}(\gamma,t)=\hat{V}(V_p\gamma_q\dot{M}_{pq}) \tag{21}$$

其中矩速率分量中的时间变量现在是$t-\beta_s^{-1}$。SV波辐射花样为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{SV}&=V_p\gamma_qM_{pq}\\ &=\sin i\cos i(\cos^2\phi M_{xx}+\sin 2\phi M_{xy}\end{aligned}$$

$$+\sin^2\phi M_{yy}-M_{xx})$$

$$+\cos 2i(\cos\phi M_{xz}+\sin\phi M_{yz}) \qquad (22)$$

注意，P和SV体波辐射花样项都与矩张量分量的相同组合有关。在水平面上，SH波的贡献有一类似的结构：

$$4\pi\rho_s\beta_s^3 u^{SH}(\gamma,t)=\hat{H}(H_p\gamma_q\dot{M}_{pq}) \qquad (23)$$

又具有剪切波延迟项。SH 波的辐射花样有一颇为不同的关系，它既与离源角i有关，也与矩张量分量有关，有

$$\mathscr{F}^{SH}=H_p\gamma_q M_{pq}$$

$$=\sin i[\sin\phi\cos\phi(M_{yy}-M_{xx})+\cos 2\phi M_{xy}]$$

$$+\cos i[\cos\phi M_{yz}-\sin\phi M_{xz}] \qquad (24)$$

现在已经有了这些几何辐射花样之后，留下的问题是，它们如何以最佳的效果呈现出来。对于位错源，习惯的回答是应用投影球，它有 P 波辐射中膨胀部分被遮蔽的、下震源半球的投影。这种表象由于节面形状简单，它们是断层平面和辅助平面的投影，所以是有用的。但是，甚至在这种简单的情况中，通过震源球辐射的变化也不是充分地被映射。对于一般的矩张量源，节面形状对图形地判断背离双力偶特征的程度是有用的，但对某一特定方向的辐射作估量则不是太有帮助。

一个显示辐射花样的有效方法，它能用于 P，SV 和SH 辐射情况，是用一有规则的符号格点，它的尺寸代表辐射的当地幅度的大小和方向表示运动的方向，来显现一个震源半球的投影(通常是下半球)。无论对简单位错模型或者对一般矩张量，都可以这样进行。

作为一个例子，在图 3 中表示1984年 7 月Mexico一次地震，表 1 给出取自ISC报告的参数，用Harvard群确定的矩心矩张量解的三个辐射花样。这图已经用方位角和离源角都为10°增量标出，且用等面积投影(像通常用在震源研究中那样)描出。为了在离源角i处显示半径r，则在距离 $r\sin\frac{1}{2}i$，方位角 ϕ 处，放置一个符号。如果愿意要一个立体图表象，则映射点放在$r\tan\frac{1}{2}i$，及相同

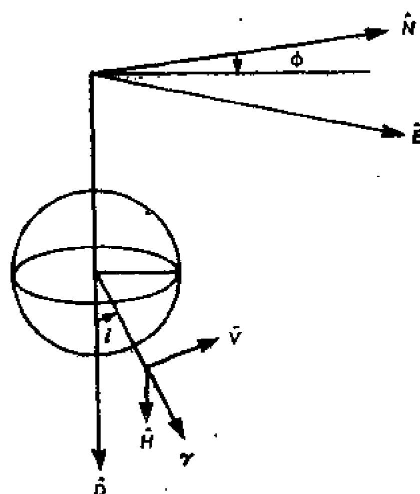


图2　离源角i和方位角ϕ对围绕震源h上的震源球的关系。表明在P方向上单位矢量γ，SV方向$\hat{V}$和SH方向$\hat{H}$的取向

1984 vii　02, 04:50:44, HRVD　　$M_{xx}=-0.76$, $M_{xy}=-0.20$, $M_{xz}=0.45$
等面积投影　　$M_0=2.16$, $M_{yy}=0.32$,　$M_{yz}=0.44$,　$M_{zz}=0.44$

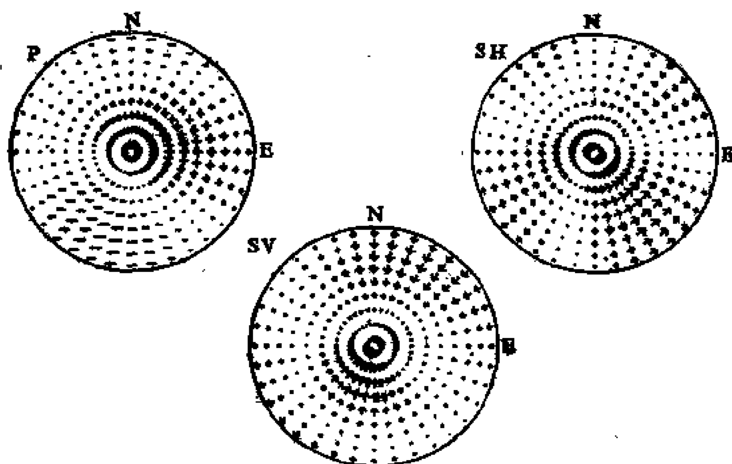


图3　表1地震的P,SV和SH波的辐射花样。符号的大小与形状表示运动概念(正号表示P波压缩，负号为P波膨胀)。符号以离源角i和方位角ϕ均为10°网格画出

的方位角上。为了得到符号大小合理形式，方便的是用最大的主

表1　用于图3—5中的墨西哥地震参数

日期：1984.7.2
发震时间：04:50:44
纬度：16.28°N
经度：98.46°W
深度：46km (ISC)，39km (HRVD)
矩心矩张量解
标尺：10^{18}Nm
$M_{xx}=M_{\theta\theta}=-1.65, M_{xy}=-M_{\theta\phi}=-0.44, M_{xz}=M_{r\theta}=0.97$
$M_{yy}=M_{\phi\phi}=0.69,\quad M_{yz}=-M_{r\phi}=0.95,\quad M_{zz}=M_{rr}=0.95$
主　轴
T　1.85，俯角52°，方位角76°
B　0.31，俯角30°，方位角299°
P　−2.16，俯角21°，方位角196°
最佳双力偶：
NP1，走向246°，倾角36°，倾伏角32°
NP2，走向129°，倾角72°，倾伏角72°
矩张量分量用描在图3—5的最大主值标度。

值尺寸归一化矩张量分量，使得各项大小与位错模型式(15)中这些与角度有关部分进行比较。主值通常随矩张量解一同发表，但能从张量分量(见附录)中容易地求得。

辐射花样的这种显示的特征之一是，节区和近节区的意义清晰地被显示。虽然图3中所示的地震有充分的非双力偶分量，没有交叉的节面，但与最合适双力偶有差异的大部分在北-西象限的低幅度区域中。我们注意这些区域高到20°—30°宽，且在许多方面是花样的主要特征；在有噪声的情况中，在这样区域中，极性的实际测定是非常困难的。因面，震源机制最靠得住的估算来自长周期波形的研究(Dziewonski和Woodhouse，1983)。对于一般的矩张量模型，辐射花样没有位错模型的四瓣对称性，且对于向上地离开震源的表面反射相，也能方便地描出一上震源半球投影，描在$r\sin\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}i\right)$上，以避免过份的畸变。

虽然图3的符号显示给出一定的洞察震源辐射特征的能力，但还是非常困难具体地表示清楚在三维中发生什么运动。一个显示半球平投影的不同方法是：要生成作为一个角位置函数的、三维的、全部P波和S波辐射的投影景象。这可以用，在方位角10°间隔中，作为离源角 $0°<i<360°$ 的函数，而描出花样轮廓的方法进行。这样一个相对简单的方法不具有除去隐线的好处，但仍然能给出一个有用的图象。在图4中，我们表示表1中的矩心矩张量解的P波和S波的辐射，及用来帮助观测三维关系的主要图形。矩张量解由主要的双力偶起支配作用，这样，这些花样不会与位错源的熟知四瓣花样相差太远。

不难得到这种投影图。首先需要选择一个景象点，且用它的

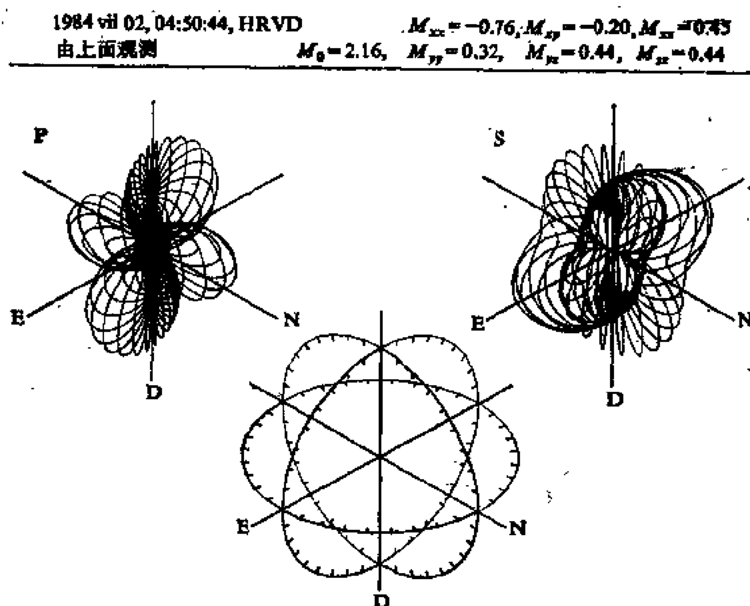


图4　与图3相同的地震，总的P和S辐射的投影显示。主要图形表示三个主要大圆特征如何显示在投影中

方向余弦确定，对于某一给定的景象角θ和方位角ψ，有

$$(l, m, n)=(\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta) \tag{25}$$

因而，由无限远看，以(x, y, z)表示的一点将被描在垂直于景象线的轴上，有坐标

$$\left.\begin{aligned} x_p &= (-mx+ly)/k \\ y_p &= \left[-lx-my+\left(n-\frac{1}{n}\right)z\right]\frac{n}{k} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

其中$k=(1-n^2)^{1/2}=\sin\theta$。对于图4，我们已经取$(l, m, n)=(-1, -1, -1)/\sqrt{3}$，这样北向轴和东向轴都放置成图 3 中那样的形状。辐射花样$\mathscr{F}^{P}$，$[(\mathscr{F}^{SV})^2+(\mathscr{F}^{SH})^2]^{1/2}$已经由标定方位角和离源角每一联合的半径矢量来代表：

$$(x, y, z)=\mathscr{F}(\sin i\cos\phi, \sin i\sin\phi, \cos i) \tag{27}$$

4. 面波辐射花样

对一由矩张量描述的点源，在频率域，存在相对简单的远场面波位移的表达式。位移能以相应的单个面波震型贡献的总和来表示(Aki和Richards，1980，第七章；Kennett，1983，第十一章)。在柱坐标系(r, ϕ, z)中，Rayleigh 波的远场位移耦合垂向和径向分量，而 Love 波只出现在切向分量。每一震型贡献由一些震型本征函数构成，本征函数是波数，深度及频率，与波数有关的径向相位项和与源深度有关的辐射项的函数。

对于Rayleigh波，有

$$\begin{bmatrix} u_z^{RAYL}(r, \phi, z, \omega) \\ u_r^{RAYL}(r, \phi, z, \omega) \end{bmatrix}=\sum_j\begin{bmatrix} U_E(k_j, z, \omega) \\ iV_E(k_j, z, \omega)\end{bmatrix} \times\frac{\mathscr{F}^{R}(k_j, \phi, h, \omega)}{4c_jU_jI_j^R}\left(\frac{2}{\pi k_j r}\right)^{1/2} \times\exp\left(ik_jr+\frac{i\pi}{4}\right) \tag{28}$$

这里U_E和V_E是震型本征函数的垂直和水平位移分量($-r_2$和r_1，用Aki和Richards的符号)，c_j和U_j是震型的相速度和群速度，且有

$$I_j^R=\int_0^\infty dz\rho(z)[U_E^2(k_j,z,\omega)+V_E^2(k_j,z,\omega)] \tag{29}$$

它来自动能项。Rayleigh 波辐射项，与在震源深度处计算的本征位移和它们的导数，以及给定的震源激发项有关。

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^R(k_j,\phi,h,\omega)=&k_jV_E(k_j,h,\omega)(\cos^2\phi M_{xx}\\&+\sin 2\phi M_{xy}+\sin^2\phi M_{yy})\\&+ik_j\left[U_E(k_j,h,\ \omega)+\frac{\partial V_E}{\partial z}(k_j,\ h,\omega)\right]\\&\times(\cos\phi M_{xz}+\sin\phi M_{yz})\\&-\frac{\partial U_E}{\partial z}(k_j,h,\omega)M_{zz}\end{aligned} \tag{30}$$

它是通过本征位移和矩张量分量的频率关系，与频率有关。$\mathscr{F}^R$像体波辐射项$\mathscr{F}^P$和$\mathscr{F}^{SV}$,式(20)和(22)那样,与矩张量的同样组合有关。出现在Rayleigh 波辐射花样式(30)中矩张量组合的角度关系，表示在图 5 中，像前面一样的极性图。总辐射，用激发项通过本征位移与结构相互作用来表示。

对于Love波，有

$$\begin{aligned}u_\phi^{LOVE}(r,\phi,z,\omega)=&-\sum_l W_E(k_l,z,\ \omega)\frac{\mathscr{F}^L(k_l,\phi,h,\omega)}{4c_lU_lI_l^L}\\&\times\left(\frac{2}{\pi k_lr}\right)^{1/2}\exp\left(ik_lr+\frac{i\pi}{4}\right)\end{aligned} \tag{31}$$

其中W_E是Love震型中的本征位移，且有

$$I_l^L=\int_0^\infty dz\rho(z)W_E^2(k_l,z,\omega) \tag{32}$$

Love波辐射花样有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^L(k_l,h,h,\omega)=&ik_lW_E(k_l,h,\omega)[\sin\phi\cos\phi(M_{yy}-M_{xx})\\&+\cos 2\phi M_{xy}]-\frac{\partial W_E}{\partial z}(k_l,h,\omega)\\&\times(\cos\phi M_{yz}-\sin\phi M_{xz})\end{aligned} \tag{33}$$

它结合成像式(24)SH 中体波项 $\mathscr{F}^{SH}$ 的相同的矩张量组合。在Love波辐射花样中矩张量的角度关系也示于图5中。

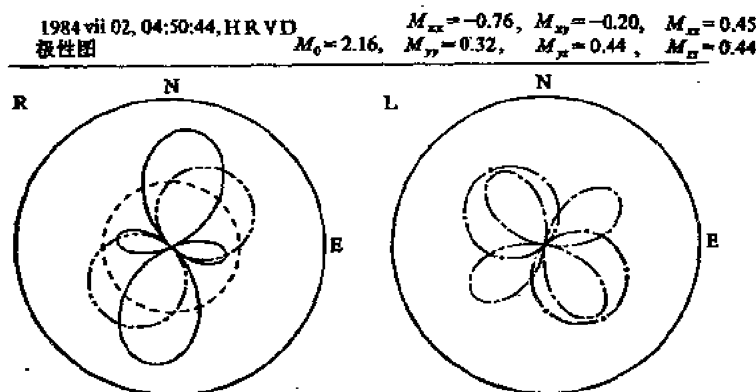


图5 以极性图表示的、出现在面波辐射花样式(30)和(33)中矩张量组合的方位关系：——，$\cos^2\phi M_{xx}+\sin 2\phi M_{xy}+\sin^2\phi M_{yy}$；— — —，$\cos\phi M_{xz}+\sin\phi M_{yz}$；- - - -，$M_{zz}$；— - —，$\sin\phi\cos\phi(M_{yy}-M_{xx})+\cos 2\phi M_{xy}$；—·—，$\cos\phi M_{yz}-\sin\phi M_{xz}$

附录：矩张量主值

在上面已经看到，能够构成相当于一个点剪切位错源的矩张量，但什么是相当于一剪切位错的给定矩张量的条件呢？我们要求（i）M的一个主值为零；（ii）M的迹为零。这些是对于M_{pq}有$e_pn_q+n_pe_q$形式的充要条件，因为这有主向

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{p}=2^{-1/2}(n-e) & \text{主值为}1\\ \hat{t}=2^{-1/2}(n+e) & \text{主值为}-1\\ \hat{b}=n\wedge e & \text{主值为}0\end{array}\right\}\qquad(A1)$$

因此，如果M是相当于一双力偶模型，无论detM和trM＝$M_{xx}+$ $+M_{yy}+M_{zz}$都必须为零。

在更一般情况中，M的主值是非常容易求得。首先，将迹设定为零，即修改对角项，构成

$$M'_{ij}=M_{ij}-\frac{1}{3}\text{trM}\delta_{ij} \tag{A2}$$

而使任何各向同性分量去掉。因而M′的主值满足

$$\lambda^3-K\lambda-\det M'=0 \tag{A3}$$

其中

$$K=M^2_{xy}+M^2_{xz}+M^2_{yz}-M_{xx}M_{yy}-M_{yy}M_{zz}-M_{xx}M_{zz}$$

及有如下解：

(a) 如果detM′＝0，则

$$\lambda=0,K^{1/2},-K^{-1/2} \tag{A4}$$

(b) 如果detM′≠0，则

$$\lambda=q\cos\theta,\quad q\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right),\quad q\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right) \tag{A5}$$

这里

$$q=2\left(\frac{1}{3}K\right)^{1/2},\theta=\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3\det M'}{Kq}\right)$$

因而主向可通过求解如下的矢量u分量的方程，而容易地求得，即

$$(M'_{ij}-\lambda\delta_{ij})u_j=0,\qquad i=1,2,3, \tag{A6}$$

如果原张量M的迹是非零的，则$\frac{1}{3}$trM必须要加在每一个主值上。

第三章　初动资料的单一和联合断层面解

A．Udías和E.Buforn

（马德里孔普卢屯大学地球物理学系）

1．引　　言

虽然另外一些方法，例如，根据波形分析，或体波及面波矩张量反演的方法，来修正震源参数近来已有发展，但P波初动极性的断层面解还是被广泛应用着。在许多情况中，它们构成有效地获得关于震源机制方向信息的唯一方法。进一步，在许多情况中，例如用少量流动台站进行微震观测，或者余震监视，联合或合成断层面解是唯一可能的。最通常，断层面解是用图解法确定，大量消耗时间和精力，且不提供解的正式误差范围，在联合解的情况中，图形分析变成极困难的任务。对于单震及震群联合解情况，算法都已有了发展，这些算法不单允许快速确定断层面的方向和它们的图形表象，而且也允许应用SV和SH初动的极性，并且，首先要计算所含角度的标准偏差。对于联合解，算法考虑到，将地震分成为不同机制组，且作为结果，提供区域应力的方向。

2．　问题的几何学

在这些算法中，点源问题被简化到震源球，且用球坐标系求

解。用沿着射线返回到震源的办法，将台站投影到震源球的表面上，台站在震源球上的位置，由震源处的离源角i，由垂直(正向下)开始度量，及方位角ϕ，由此开始度量给定。对于远震距离，i的值根据震中区某一速度，由走时表中查得。对于近震，为了确定i，需要由成层的、或连续速度变化的模型，知道深度和地壳结构的精确资料。

震源被假定为一个纯粹的剪切位错，或者为双力偶，且由垂直于剪切平面的法线和滑移方向(X和Y轴)，或者应力主轴方向，压力和拉力(P和T轴)来表达。X和Y轴相当于双力偶模型中的两个力偶的方向，或者为两个节平面的法线。在这两种情况中，由于正交性条件，为了表达震源，只需要三个角度(例如Φ_T，Θ_T，Φ_P或Φ_X，Θ_X，Φ_Y)。轴线由从北度量的方位角Φ和从垂线(正向下，或朝底)度量的余俯角Θ给定(图1)。这套轴线与用于确定断层面的方向，即方位角Φ，倾角δ和滑移λ之间的关系，如果X是

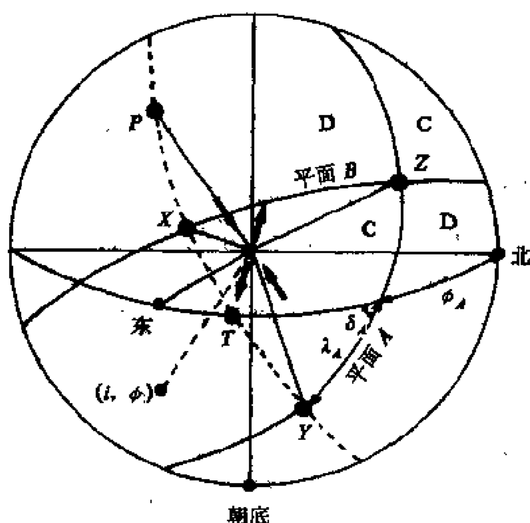


图1　P，T，X，Y和Z轴的表象和震源球上P的节平面(平面A和B)

平面A的法线，则给定如下

$$\phi_A=\Phi_X+90^\circ \qquad 0^\circ\leqslant\phi\leqslant360^\circ \tag{1}$$

$$\delta_A=\Theta_X \qquad 0^\circ\leqslant\delta\leqslant90^\circ \tag{2}$$

$$\lambda_A=\sin^{-1}\left(\frac{\cos\Theta_Y}{\sin\Theta_X}\right) \qquad -180^\circ\leqslant\lambda\leqslant180^\circ \tag{3}$$

P和T轴能从X和Y得到，或者反之，用绕垂直于X和Y轴的Z轴作一简单45°转动得到。

3. 概率模型和似然函数

算法是以Brillinges，Udias和Bolt（1980）的概率模型为基础。对于一个单震，这种模型假定在一特定的台站，观测压缩还是膨胀的概率是在那点所期待的、理论幅度的函数。在台站i，读到压缩的概率因而可以由如下形式表示

$$\pi_i=\gamma+(1-2\gamma)\Phi[\rho A_i(\hat{\theta})] \tag{4}$$

在这个表达式中，$\gamma\left(0\leqslant\gamma\leqslant\frac{1}{2}\right)$是一个考虑到读者误差的参数。它的极值是$\gamma=\frac{1}{2}$，这把概率减低到全部不确定$\left(\pi_i=\frac{1}{2}\right)$及$\gamma=0$，这表示没有读者误差存在。因为读者的行为不是预先知道的，所以在算法应用上，γ被赋于一个小的常数值，$\gamma=10^{-6}$，这表示小的读数误差。这个参数不进入最大化过程。Φ是正态累积函数，$\rho=\alpha/\sigma$，这里α是一个比例常数，而σ是噪声的标准偏差。A_i是相应于震源一个特定方向$\hat{\theta}(\Theta_T,\ \Phi_T,\ \Phi_P)$的归一化理论幅度。对于一个地震，由于在每一台站，预先不知道噪声，所以ρ被给定为一个常数值（如$\rho=1$）。在概率的定义中，引进理论幅度$A_i(\hat{\theta})$，这个方法，对预期幅度较小的近节平面的数据，给予较低的权重。

相应于震源某一确定方向$\hat{\theta}$，一套特定的初动观测Y_i的概

率能写成为

$$F=\prod_{j=1}^{N}[\pi_j^{(1+Y_j)/2}(1-\pi_j)^{(1-Y_j)/2}] \qquad (5)$$

在这表达式中，假定每一观测的概率是独立的。Y_j 是等于 +1或 −1，相应于观测到压缩或膨胀，且 π_j 由式(4)给出。

问题的解包括，寻求由三个角度(Θ_T，Φ_T，Φ_P或者Θ_X，Φ_X，Φ_Y)确定的震源方向$\hat{\theta}$，这个方向使相应这套观测值 Y_j 在这个方向的概率这到最大值。这是以似然函数(由式(5)代表)达到最大值方法进行的，似然函数以一等效对数形式，利用 π_j，作为 A_j 的一个函数的对称性，被给定为

$$L=\sum_{j=1}^{N}\log\left\{\frac{1}{2}[1+(2\pi_j-1)Y_j]\right\} \qquad (6)$$

能够看到，L 是一个包含有参数的可微函数，这样，存在有种种有效的最优化程序，能适合于解题。在它们现在讨论的形式中，程序利用 Harwell(UKARE) 程序库中的子程序VA09A，这是建立在梯度法的基础上。有关的最大化程序及有关的统计学细节，在Chambers在文章(1977)中讨论，进而，因为方法是最大似然法，所以有估算标准误差的表达式，及试验有关参数值假设的方法。由函数L知，资料矩阵I($\hat{\theta}$)能被确定为

$$[I]_{ln}=-E\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial\Theta_l\partial\Theta_n}\right\} \qquad (7)$$

I的逆是一协方差矩阵C($\hat{\theta}$)。C的对角元素提供了计算参数$\hat{\theta}$的方差。虽然这个方法只是直接计算用于这个解的三个角度的标准误差，但定义轴线，或节平面方向的其他角度的误差，也能容易地确定。这点是重要的，因为没有其他应用极性的方法能提供确定震源方向的参数标准误差的正式估算。

虽然L的绝对值对解的误差给出一个全面的度量，但困难的是要从一个情况到另一个情况作比较。由于这个理由，因而决定应用正确极性的比数或比例：

$$p = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}(1+Y_j \operatorname{sgn} A_j) \quad (8)$$

作为解好坏的度量。这个值，与所应用的资料数目N及参数的标准偏差，给出有关解的统计精度的必要资料。但应当指出，在参数标准偏差的估算中，对于完全比数情况($p=1$)可能发生问题。在这种情况中，$I(\hat{\theta})$的某一对角元素可能是零，这表示，在某种意义上，所涉及的那个特定的参数值没有有效的信息。

3.1 应　　用

对于单个解，问题的参数是定义 P 和 T 轴方向的三个角度 Θ_T，Φ_T和Φ_P。由它们，可得X和Y，节平面A和B的法线，和确定每一平面上运动的三个角度ϕ，δ及λ。也可能引进确定X和Y轴方向的角度Θ_X，Φ_X和Φ_Y作为独立参数，且由它们计算P和T的方向。

因为方法是一个迭代过程，所以必须提供一个初始解。当与观测台站数目有关时，这种初始解不需要是一个很好的近似解，因为实际已经证明，在大多数情况中，这个程序充分有效地使相当差的初始选择收敛到最好的解(Brillinger等，1980)。

也能够应用S波分量SV和SH的初动符号(Buforn 和 Udias, 1984)。在这种情况中，建立运动正或负特征所遵从的准则是由Stauder(1960)给定的。S初动极性观测能用于补充P观测，这样增加了独立方程数，因而，降低了解的不定性，在某些情况中，减少单由P资料确定的含糊不清。

一个具有走滑机制地震的实例给出在图2中。这个解对应于Azores地震，1980.1.1，16h 42m 42s发生在38.8°N，27.8°W，$M=7$。P波资料数目是36。两个平面的标准误差都是小的(小于6°)。增加10个台站的SV和SH极性没有显著改变解或标准误差。两个解都给出在表1中。

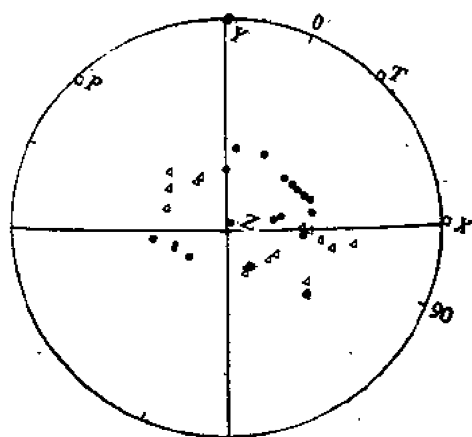


图2 1980. 1. 1，Azores 地震的 断层面解。根据P波资料。实心圆表示压缩，三角表示膨胀

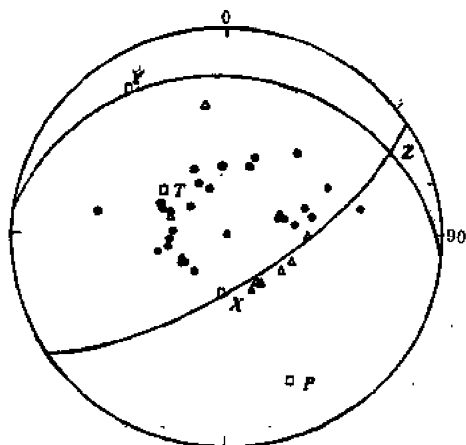


图3 根据P波和S波资料得到的1964. 3. 15，Cádiz 海湾地震的断层面解。实心圆表示压缩；三角表示膨胀

表1 根据P波，及P和S波初动资料得到的

1960.1.1地震的断层面解

N	T和P轴			节平面				ρ
		Θ	Φ		φ	δ	λ	
36(P)	T_1	88±4	21±5	A_1	66±5	88±4	7±5	0.89
	P_1	89±2	291±19	B_1	156±5	89±4	1±5	
46(P+S)	T_1	88±3	194±5	A_1	239±5	88±3	5±3	0.65
	P_1	85±6	284±10	B_1	149±5	85±4	2±2	

一个有倾滑机制地震的实例给出在图3中。这个解对应于Cádiz海湾地震，1964．3．15，22h 30m 26s发生在36.2°N，7.6°W，$M=6.2$。P波资料数目是38。只有平面倾滑和轴线的俯角是被很好地确定。特别，近水平平面的方位角计算得很差。加上18个SV和SH极性，平面的方位角和轴线走向的误差显着地被减小。两个解之间的最大差异是近水平平面的方位角。在表2中，能看到这些结果。

表2 根据P波，及P和S波初动资料得到的

1964．3．15地震的断层面解

N	T和P轴			节平面				ρ
		Θ	Φ		φ	δ	λ	
38(P)	T_1	30±9	355±43	A_1	220±120	19+3	60+30	0.92
	P_1	62±9	154±46	B_1	71±18	74±6	81±8	
56(P+S)	T_1	29±4	304±19	A_1	276±37	24±9	53±10	0.89
	P_1	65±4	158±9	B_1	56±11	71±4	75±6	

4. 联 合 解

这里提出的算法证明，作为分析许多地震的合成或联合资料

一种方法，更为有用(Udias等，1982)。在联合或者合成解中，同一区域的一组M个地震，由假设它们中的大多数有相同的机制出发予以研究。对于每一个地震，观测资料数目可能是少的，因而它们不能很好确定单个解。每个地震的观测资料数目是N_i。在台站j，由地震i，读到压缩的概率用类似于式(4)的表达式给出，有形式

$$\pi_{ij}=\gamma+(1-2\gamma)\Phi[\rho_i A_{ij}(\hat{\theta})] \tag{9}$$

在这表达式中，ρ_i是一组参数，以权重赋值于每一地震的所有观测中。在似然函数最大值化过程中，这些参数起变量作用。它们的最后值表明有联合解的每一地震资料的一致性程度。相当于式(6)的对数似然函数是

$$L=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_i}\log\left\{\frac{1}{2}[1+(2\pi_{ij}-1)Y_{ij}]\right\} \tag{10}$$

在L最大值化过程中，变量数是$M+3$，即联合解方向Θ_T，Φ_T，Φ_P及ρ_i值$i=1,\cdots,M$。为了开始迭代过程，除了一个初始解外，还必须给定一组初始值ρ_i。为了不偏离解，这些值必须全是相等的。实际已经表明$\rho_i=6$是一个最好的选择。在这个过程中，由联合解推测的、与观测值有相反符号的地震，ρ_i可以赋为负值。为了知道什么范围的地震与联合解一致，检验每个地震的比数p_i及p_i对ρ_i的图线。在这些图中，对于完全一致的情况，有$p_i=1$及ρ_i趋于无穷；对于$p_i=0.5$情况，则$\rho_i=0$，以此代表纯粹偶然性事件；而对于$p_i<0.5$情况，ρ_i取负值，随p_i减小而趋向负值增大，直到$p_i=0$(完全相反一致)，则趋于负无穷。

为了识别地震，采用p的门值(如$p=0.7$)，在门值以下，则认为该地震不具有由联合解得到的相同机制，因而，根据p_i值小于还是大于门值，将地震分成为两组。第二组是相当于由联合解满足的地震。为了寻求相继的联合解，继续进行这个过程。

4.1 应　　用

联合解方法的一个例子是Arudy地震(1980.2.29)的一组49个余震，这些余震是用临时台站，在 Pyrenees 记录的。余震大小的范围界于1.5—4之间，震中位置给定在图4中。考虑三个相继的ρ_i对ρ_i的图，像图5所示，就会较好地理解这个方法。在第一阶段，所有49个地震和728个观测资料，均以相等ρ_i值($\rho_i=6$)进行应用。程序收敛到这样一个解，它的ρ_i对ρ_i的图线给定在图5(a)中。应用$\rho=0.7$作为门值，27个地震($\rho_i\geqslant 0.7$)被分成为组Ⅰ。这27个地震再一次在程序中运行，对组Ⅰ改进所得到的联合解。再运行另外22个地震，将它们重新设定$\rho_i=6$的情况。对于$\rho\geqslant 0.7$，得到一个新解，这个新解有7个地震，成为组Ⅱ。ρ_i对ρ_i的

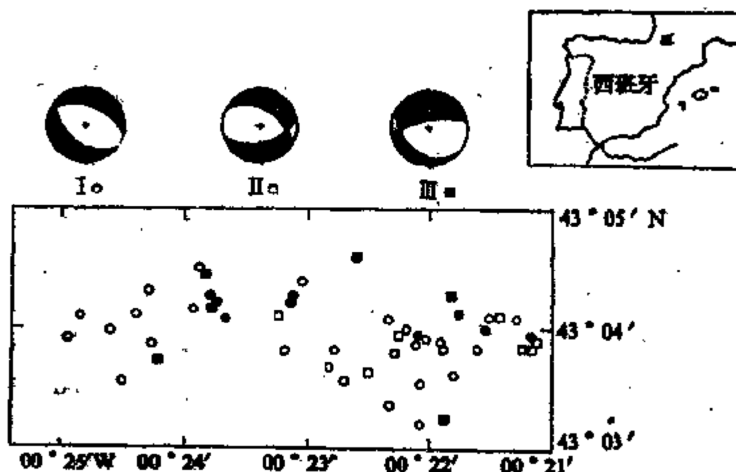


图4　1980. 2. 29Arudy(法国)地震的49个余震的震中和组Ⅰ，Ⅱ及Ⅲ的联合断层面解。实心圆相应于不属于任何组的地震

图线及机制示于图5(b)中。这个过程，对余下的15个地震再一次重复，形成组Ⅲ，它有六个地震(图5(c))。对于没有包括在这三组中的九个地震，已经得到单独解。在这种情况中，这是可能的，因为对于每次地震，有大约18个观测资料。

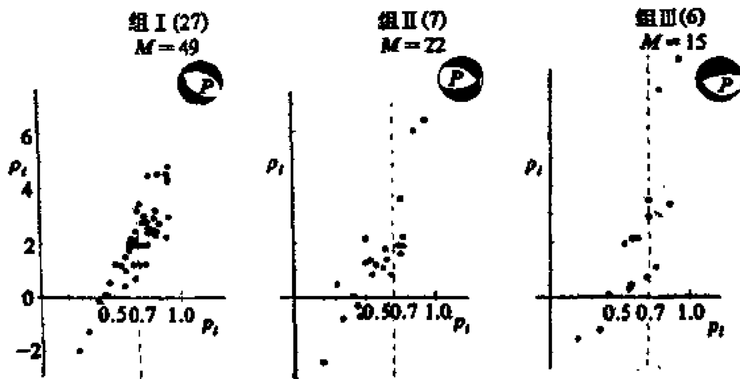


图5 1980. 2. 29Arudy(法国)地震的49个余震的 p_t 对 ρ_t 的图，表示三组地震的分离过程及它们相应的联合解

表3 1980. 2. 29Arudy地震三组余震的联合断层面解

组，N	T和P轴			节平面				ρ
		Θ	Φ		Φ	δ	λ	
Ⅰ，396	T:	90±2	212±3	A:	289±5	46±1	71±8	0.80
27个地震	P:	14±3	121±7	B:	135±3	47±2	71±7	
Ⅱ，106	T:	90±4	192±5	A:	85±11	48±2	65±10	0.78
7个地震	P:	18±4	284±9	B:	301±3	48±3	65±10	
Ⅲ，82	T:	67±1	4±2	A:	127±2	28±1	46±4	0.78
6个地震	P:	31±1	140±4	B:	259±3	71±1	70±1	

三个组的最后解给定在表3中。三个组的机制是十分类似，相当于主要是倾滑正断裂，有水平拉伸轴，走向在共同的南-北向。参数的标准偏差是小的(1°—10°之间)。机制的地理分布给定

在图4中，且不表明任何特殊的分组。没有包括在任何组中的九个地震机制有下列类型，两个是逆断裂，四个是在一个垂直平面上的倾滑，及三个是有与三个主要组的不相同方位角平面上的正断裂。

5. 计算机程序

在这章中所叙述的算法，已用Fortran Ⅳ编成Univac-1100/80的程序。程序包已经准备定名如下：

PAPUSI　从走时表中和一给定的震源-深度速度，确定远震距离的角度φ和i。

CASOL　从随深度变化速度的地壳模型，确定近距角度φ和i。

MECSTA　P波初动（对单一解$M=1$）的联合或单一解。最后解用P，T，X，Y和Z轴方向（Θ，Φ），及A和B节平面的（ϕ，δ，λ）和它们的误差给定。中间结果，观测情况和轴线被打印出来。

ONDAPS　P，SV和SH初动的联合或单一解。像MECSTA一样特征。

EJESPT　输入到CALCOMP描图程序包中，描出在下半震源球的等面积（Schmidt）投影上（图2和图3），最后解的图（轴线和平面）和观测值（最大为500）。

程序索引

将所有程序编排成文件。每一个文件可能包含有多个程序且都用一个文件名标记。文件按文件编号的顺序放在程序带中。程序都使用Fortran语言。

顺序 No.	名　　称	内　　　　容	章　次
1	CONTENTS	内容和一般资料。	
2	SCHAIRY	由垂直变化层构成的地球模型中，波谱合成。输出是体波复波谱。	第一篇 第一章
3	WIGGLES	用快速Fourier变换，将复波谱变回到时间域。取SCHAIRY输出。	第一章
4	VALUES	在SCHAIRY程序包内，装配复射线积分的被积函数。	第一章
5	RAYLEG	用Romberg和三点积分计算延迟时间τ的一组程序。	第一章
6	TRAPEZ	对一给定复射线参数段进行梯形积分。也装配被积函数的震源和接收器分量因子。	第一章
7	COEFF	计算一个交接面上的25个反射/折射系数。也是来自	第一章

续表

顺序 No.	名称	内容	章次
		一叠按段光滑层的反射计算程序。	
8	CVELOC	SCHAIRY 程序的复速度函数。速度可以与频率有关。也包括标准地球模型。	第一章
9	TURN	在一给定复射线参数情况，找出一给定层中复转折点(半径)。也是横向各向同性层中，SH波和P-SV波的程序。	第一章
10	VSL	计算广义射线垂直慢度。	第一章
11	LANGER	给定圆频率ω和延迟时间τ情况，用 Langer 均匀渐近近似，得到广义慢度和垂直波函数。	第一章
12	BLOCK DATA	在SCHAIRY程序包中，对给定速度-密度-Q模型应用的数据说明。	第一章
13	RAWIO	用于 SCHAIRY 程序包中，以C语言写成的IO程序。在 RAWIO 中的子程序用来写出临时的二进制贮存文件。	第一章
14	SCHAIRY D	如何编写和连接第一篇第一章中程序(MAKEFILE)，	第一章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
		实例主程序(VCMAIN2)，和PKP波实例输入及S，SKS和ScS波实例输入。	
15	SZEGO	近对跖点或震源点上Legendre函数的Szego渐近公式。	第一章
16	WKBJ PRG	WKBJ程序（和子程序RAYIN)。	第二章
17	WKBJ DAT	WKBJ程序的实例输入数据。	第二章
18	WKBJ OUT	WKBJ程序的总输出。	第二章
19	WKBJ FOR	WKBJ算法的THETAC子程序和CCSQRT子程序。	第二章
20	RAY1D FOR	一维模型中射线追踪的子程序PXINT，COEFF和COMPON。	第二章
21	RAY1DQ FOR	有衰减的一维模型中，射线追踪子程序PXINT，COEFF和COMPON。	第二章
22	COEFF TST	试验有衰减和没有衰减的COEFF子程序的程序。	第二章
23	EXMAR	读入和参数化考虑到椭率的径向和非球状模型的子程序。	第三章
24	EXRAY	在径向模型中，加上一阶	第三章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
		非球状修正时的射线追踪。	
25	EXPER	在$\delta v/v$和$\delta r/r$球谐展开式中的走时项。	第三章
26	EXASP	非球状和椭率修正的应用程序。	第三章
27	EXTRA	非球状和椭率修正的试样输入、输出和模型文件。	第三章
28	METRIC	量度张量和 Christoffel 符号的计算(第二节)。	第二篇 第一章
29	MODEL	读入和贮存模型输入数据(第3.2.1节)。	第一章
30	SRFC	给定光滑曲面的程序(第3.2.2节和第3.5节)。	第一章
31	PARM	给定介质参数的程序(第3.1.3节)。	第一章
32	BLOCK	在简单和复杂块体中确定位置(第3.3.1节)。	第一章
33	VELOC	将介质参数变成为波速和耗损因子(第3.3.2节)。	第一章
34	CODE	将基本波编码变成在射线初始点上和与交接面交点上的说明(第4节)。	第一章
35	RAYCB	通过一复杂块体中的完全射线追踪(第5.8节)。	第一章
36	TRANS	通过一弯曲交接面的完全	第一章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
		射线追踪(第5.9节)。	
37	INIT	给定射线初始点上的量。	第一章
38	INIT1	读入和预处理射线初始点的输入数据(第6节)。	第一章
39	INIT2	计算射线初始点上的量(第6.1节)。	第一章
40	REVIEW	第二篇第二章三维射线追踪主程序的评述。	第二章
41	USER	给定第二篇第二章三维射线追踪模型用户提供的子程序目次。	第二章
42	ITH	在均匀各向同性块体中两点射线追踪。包括首波射线。	第二章
43	ITHEX	在地震测量中，近迹图线ITH的定常偏移形式。	第二章
44	ITHGEN	在均匀各向同性块体中，两点射线追踪。包括首波射线。产生初次近似射线。	第二章
45	GENLIB	ITHGEN子程序库。	第二章
46	ITHDIF	在均匀各向同性块体中，两点射线追踪，考虑边缘衍射射线。	第二章
47	ITNIPH	在各向同性、均匀块体中，NIP射线的边界值问题	第二章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
		的迭代解。	
48	ITHIPDH	NIP 射线的边界值问题的迭代解。考虑NIP 反射面上的边缘衍射。	第二章
49	HOMLIB	ITH, ITHEX, ITHGEN, ITHDIF, ITNIPH, ITNIPDH 子程序库。	第二章
50	ITIL	在非均匀和/或者各向异性介质中，两点射线追踪。平行射线追踪。大多考虑一条边缘射线。	第二章
51	INHLIB	ITIL的子程序库。	第二章
52	TRGRDI	在各向同性、均匀的和常梯度块体中的初始值射线追踪。	第二章
53	TRGRDC	在非均匀和/或者各向异性块体中，初始值射线追踪。	第二章
54	TRGRDB	在非均匀和/或者各向异性块体中，初始值射线追踪。不同的射线编码。	第二章
55	TRNIPH	在均匀各向同性的块体中，垂直于反射交接面的初始值射线追踪。	第二章
56	TRILIB	TRGRDI, TRGRDC,	第二章

顺序 No.	名　称	内　容	章　次
		TRGRDB，TRNIPH 的子程序库。	
57	DYNTRAC	动力学射线追踪。混合法：线性、规则和奇异的DRT。	第二章
58	DYNTRACL	独有地线性动力学射线追踪。	第二章
59	DYNLIB	DYNTRAC，DYNTRACL的子程序库。	第二章
60	DYNEXAMP	DYNTRAC和DYNTRACL 的实例和比较。	第二章
61	DYNPROP	沿射线，传递矩阵的追踪。	第二章
62	CONTOUR	追踪由交接面给定的模型衍射边缘和线路图。	第二章
63	EDGLIB	CONTOUR的子程序库。	第二章
64	MODLIB	试验目的用的模型库实例。	第二章
65	REFER	用在第二篇第二章算法的参考公式。	第二章
66	SNERTMAN	计算成层衰减介质理论地震图程序说明，有矩张量源，以近似于响应来控制。	第三篇 第一章
67	SNERTRESP	在频率-慢度域，选择反	第一章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
		射和折射项，计算成层结构响应的主程序和程序。	
68	SNERTMMRF	计算与慢度有关，但与频率无关的响应部分，即，震源激震项和交接面反射/折射系数。	第一章
69	SNERTCOEFF	计算包括自由表面影响的成层部分的反射和折射矩阵。	第一章
70	SNERTSINT	为了在给定范围上得到理论地震图，对慢度根据梯形规则，进行简单积分，且在频率域上用FFT。	第一章
71	SHPSV	解垂直变化介质中的两点问题，来构成频率-慢度域上完全响应的一个软件包。	第二章
72	SPDRIVE	软件包SHPSV的一个实例驱动器。	第二章
73	TRAPEZON	梯形 Filon 求积公式（式(6)）。	第三章
74	DISPER	程序包 DISPER80 的简要资料。	第四篇 第一章
75	TOROID	扭转振荡计算。包含子程序 TOREX1，TORDSP，TORRKG，TOREFR，	第一章

续表

顺序 No.	名称	内容	章次
		TORENG,TORINI,DSPZN,DSPREV DSPDEP,DSPRNT	
76	NOGRAV	非重力球状振荡计算。包含子程序NOGEX1,NOGDSP,NOGRKG,NOGEFR,NOGENG,NOGINI,DSPZN,DSPREV,DSPDEP,DSPRNT。	第一章
77	SPHERO	重力球状振荡计算。包含子程序SPHEX1，SPHDSP,SPHRKG,SPHEFR,SPHENG,SPHINI,SPHDEL,DSPZN,DSPGRV,DSPDEP,DSPRNT。	第一章
78	LOVE	用Runge-Kutta-Gill方法(LOVE1)和用矩阵法(LOVE2)计算Love波。包含有子程序：LOVEX1,LOVEX2，LOVDSP，LOVRKG，LOVMRX，LOVEFR LOVEFX，LOVENG，DSPREV，DSPDEP，DSPRNT，DSPRNX。	第一章
79	RAYLEI	用Runge-Kutta-Gill方法(RAYLE1)和用矩阵法(RAYLE2)计算Rayleigh波。	第一章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
		包含有子程序：RAYEX1，RAYEX2，RAYDSP，RAYRKG，RAYMRX，RAYEFR，RAYEFX，RAYENG，DSPDEP，DSPRNT，DSPRNX。	
80	OBANI	计算第四篇第二章中自由振荡的主程序和所有子程序。	第二章
81	DOC	程序OBANI的执行须注。	第二章
82	PREM	用在产生实例输出的地球模型(文件BOUNDS和EIFS)	
83	DATA	OBANI的实例输入文件。	第二章
84	BOUNDS	本征频率限的实例输出文件。OBANI输出。	第二章
85	EIFS	含有本征函数的实例输出。OBANI输出。	第二章
86	CHOL	Choleski分解程序：CHOLIN 进行分解 $A=LL^T$。CHOLSL 求解系统 $Ax=LL^Tx=b$。	第三章
87	DIAG	$(A-\lambda I)x=0$ 的本征值和本征矢量，其中A为实的、对称和稠密矩阵。也含有DOT(两个矢量的点积)。	第三章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
88	SPLNBF	给定N个节点位置的样条基函数：QSBF(N+1个二次样条)，(N+2个立方B样条)，HSBF(2N个立方H样条。	第三章
89	INTERP	内插程序：BSPLN（按段确定立方B样条），BSPLE（用BSPLN进行B样条内插），HSPLE(H样条内插)。	第三章
90	GLQ	可选择阶的Gauss-Legendre求积。	第三章
91	JHW	$(A-\lambda B)x=0$ 的本征值和本征函数，其中A和B是实的、对称的和成带的矩阵。包含有JHW（交接面程序)EGNVL,FZERO,SRAY,BDET,BSOL和DOT。	第三章
92	BDRD	一个成带系统的Givens转动。包含有BDRD,TANGLE和UNTNGL。	第三章
93	BLAS	由Lawson等(1979)给出的基本线性代数子程序。这些程序进行基本矢量运算：加、点乘、范数、移动、拷贝、及基本转动运算。	第五篇 第一章

续表

顺序 No.	名称	内容	章次
94	BLASSUP	补充到BLAS中的基本矢量算法。单精度，基本矢量加和减程序。	第一章
95	MTRXADD	空间-经济化矩阵加法程序。	第一章
96	MTRXMUL	空间-经济化矩阵乘法程序。	第一章
97	MTRANS	原地矩阵转置程序。	第一章
98	MTRXO	矩阵初始化程序。	第一章
99	MTRXIO	矩阵输入，输出和打印程序。	第一章
100	LLSQ	Lawson 和 Hanson 提出的(1974)线性最小二乘方分析程序。包括在另外程序中，QR因子化，奇异值分解(SVDRS)，Householder 变换(H12)程序。	第一章
101	PROJECTOR	执行正交投影(PROJECT)和它们的补充(COMPPRO)程序。	第一章
102	GISQL	用伪逆解求解线性方程组的程序GISOL和NUMBIG。应用在文件SVDRS中提供的程序LLSQ (Lawson 和 Hanson, 1974)。	第一章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
103	LSQR	用 Page 和 Saunders (1982 a, b) 共轭梯度法的稀疏线性最小二乘方解算法。	第一章
104	SEQHT	应用以 Householder 变换为基础的顺序堆积的 QR 因子化。	第一章
105	LINPACK	关于如何得到一份 Dongarra等的矩阵运算软件包的资料。	第一章
106	RADMAN	计算包含有输入、输出文件给定下的一个矩张量源辐射花样程序的说明。	第二章
107	RADPAT	在等面积投影中，P，SV 和 SH 的体波辐射花样表达式的主程序。	第二章
108	RADPROJ	远场的 P 和 S 体波辐射花样表达式的主程序。	第二章
109	RADSW	Rayleigh面波和Love 面波辐射项表达式的主程序。	第二章
110	RADPLT	被另外一些辐射程序应用的子程序库：运算矩张量分量程序，和描图程序。	第二章
111	CASPAP	起自震源的射线方向角(程序CASSOL和PAPUSI)。	第三章
112	MECOND	得自初动资料的联合成	第三章

续表

顺序 No.	名　　称	内　　容	章　次
113	EJESPT	单一解（程序MECSTA和ONDAPS）。 在等面积投影中，断层面解和数据的Calcomp描图。	第三章

术 语 译 名

Absorption 吸收
  ~band ~带
Addition rule 加法规则
  ~for reflection matrices 反射矩阵~
  ~for vectors 矢量~
Addition theorem 加法定理
  ~for Legendre *functions* Legendre函数~
Adjoint 伴随
  self~ 自~
Airy *function* Airy函数
Algebraic reconstruction 代数重建
Amplitude 振幅
  ray~ 射线~
  ~paraxial approximation ~平行轴近似
Anisotropy 各向异性
  ~for transverse isotropy 横向各向同性~
Annulling transform 非零变换
Antipode 对跖点
Asphericity 非球度
Asymptotic ray theory 渐近射线理论
  body wave spectrum~ 体波波谱~
Attenuation 衰减
Banded matrix 成带矩阵
Bandwidth of matrix 矩阵宽度
BLAS (*Basic Linear Algebra Subroutines*) 基本线性代数子程序
Basis functions 基函数
  finite element~ 有限元~
  local~ 局部~
  natural~ 自然~
  orthogonal polynomial~ 正交多项式~
  piecewise cubic B-*spline~* 按段立方B样条~
  piecewise cubic H-*spline~* 按段立方H样条~
  piecewise linear~ 按段线性~
  piecewise quadratic~ 按段平方~
Basis vectors 基矢量
Bending 弯曲
Bessel *function* Bessel函数
  spherical~ 球~
Bisection 二等分
Block 块体
  complex~ 复~
  isotropic~ 各向同性~

simple~ 简单~

Body force 体积力

Body wave 体波

~amplitude ~振幅

~far field ~远场

~pulse ~脉冲

Boundary conditions 边界条件

~for ray spreading Jacobian 射线扩散 Jacobi算子的~

B-spline B样条

~basis functions ~基函数

~interpolation ~内插

Cagniard-de Hoop 广义射线法

Cartesian coordinate system 直角坐标系

Causality 因果性

Caustic 焦散

~cusp ~尖端

~diffraction ~衍射

~phase shift ~相移

Characteristic function 特征函数

Christoffel *symbols* Christoffel 符号

Cholesky *decomposition* Cholesky 分解

Clenshaw-Curtis *quadrature* Clenshaw-Curtis 求积

Code 编码

~of elementary wave 基本波~

~of ray 射线~

~of NIP ray NIP射线~

~reduced raycode 折合射线~

Coefficients 系数

~conversion 转换~

~reflection/transmission 反射/折射~

~generalized reflection/transmission 广义反射/折射~

Collocation 配置

Complete 完全的

~response ~响应

~seismogram ~地震图

Composite pulse 合成脉冲

Compound-matrix method 复合矩阵法

Conjugate gradient 共轭梯度

Continuation method 连续法

Contravariant 逆变

~transformation ~变换

~vector ~矢量

Contour integration 围道积分

Conversion 转换

~coefficients ~系数

P-SV~ P-SV~

Coordinate system 坐标系

Cartesian~ 直角~

cylindrical~ 圆柱~

geographic spherical~ 地理球~

ray centred~ 射线中心~

source reference~ 震源参考~

spherical polar~ 球极~

Core 核心

Core-mantle boundary 核幔边界

Covariant 协变

  ~transformation ~变换

  ~vector ~矢量

Curvature 曲率

  ~of interface 交接面~

  ~of wavefront 波前~

Cylindrical coordinate system 圆柱坐标系

  vector harmonics~ 矢量调和~

Delay function 延迟函数

Differential equations 微分方程

Diffraction 衍射

  ~edge ~边缘

  ~poles ~极点

Dines *and* Lytle *algorithm* Dines和Lytle算法

Dip 倾斜

Dip-slip 倾滑

Dispersion relation 频散关系

  inverse~ 反~

Displacement 位移

  ~vector ~矢量

  ~matrix ~矩阵

Dissipative medium 耗散介质

Double couple 双力偶

Dynamic group 动力学组

Dynamic ray tracing 动力学射线追踪

  ~initial conditions ~初始条件

  linear~ 线性~

  regular~ 规则的~

  singular~ 奇异的~

Earth 地球

  ~model ~模型

  ~flattening transform ~展平变换

Earthquake 地震

  ~location ~位置

  ~fault plane solution ~断层面解

Edge 边缘

  ~diffraction ~衍射

  tracing~ 追踪~

Eigenfrequency 本征频率

Eigenfunction 本征函数

  multicomponent~ 多分量的~

Eigenproblem 本征问题

  banded matrices~ 成带矩阵~

  dense matrices~ 稠密矩阵~

Eigenvalue 本征值

Elementary 基本的

  ~reflector ~反射面

  ~synthetic seismogram ~合成地震图

  ~wave ~波

Ellipticity 椭率

  ~correction ~修正

Energy integrals 能量积分

~*interference* ~干涉
~*ray* ~射线
Hermitian
~*matrix* ~矩阵
~*operator* ~算子
Hilbert *transform*
Hilbert变换
Homotopy of models
模型的同伦
Householder
~*rotations* ~转动
~*transform* ~变换
H-*spline* H样条
~*basis functions* ~基函数
~*interpolation* ~内插
Hybrid method 混合法
Hypocentre 震中
~*location* ~位置
Impulse response 脉冲响应
Initialization of a matrix
矩阵初始化
Initial value ray tracing
初始值射线追踪
Integration 积分
Filon~ Filon~
Gauss-Legendre~
Gauss-Legendre~
Runge-Kutta~ Runge-Kutta~
Thomson-Haskell~
Thomson-Haskell~
trapezoidal~ 梯形~
Interference head wave
干涉首波

Inverse 反的
~*dispersion* ~频散
~*iteration* ~迭代
Inversion 反演
banded matrices~
成带矩阵~
continuous linear~
连续线性~
continuous nonlinear~
连续非线性~
discrete linear~ 离散线性~
discrete nonlinear~
离散非线性~
even determined system~
适定系统~
generalized~ 广义~
least squares~
最小二乘方~
maximum likelihood~
最大似然~
sparse least squares~
稀疏最小二乘方~
Jacobian
ray spreading~
射线扩散的~
boundary conditions for ray spreading~
射线扩散的边界条件~
Kernel 核的
~*kinetic energy* ~动能
~Lagrangian ~Lagrange算子
~*potential energy* ~位能
Kinematic 运动学的

~*group* ~组

~*analogous rays* ~类似射线

Kinetic energy 动能

KMAH *index* KMAH指数

Kirchhoff *integral* Kirchhoff积分

Lagrangian Lagrange的，Lagrange算子

Lanczos *algorithm* Lanczos算法

Langer *approximation* Langer近似

Leaky mode 漏能振型

Least squares 最小二乘方

sparse inversion~ 稀疏反演~

Legendre *function* Legendre函数

addition theorem ~加法定理

Levin's *method* Levin法

Likelihood function 似然函数

Linear 线性的

~*constraints* ~约束

~*interpolation* ~内插

~*interpolation for eigenvalues* 本征值~内插

~*inversion* ~反演

LINPACK 软件包名

Local 局部的

~*model* ~模型

~*variations method* ~变分法

Location of hypocentre 震中位置

Love *waves* Love波

Lumped mass approximation 成块质量近似

Mantle 地幔

Maslov

~*index* ~指数

~*method* ~法

Matrix 矩阵

~*addition* ~加法

banded~ 成带~

fundamental~ 基本~

~*initialization* ~初始化

~*inversion* ~反演

mass~ 质量~

minor~ 子~

~*multiplication* ~乘法

paraxial approximation~ 平行轴近似~

propagator~ 传递~

ray propagator~ 射线传播~

reflection/transmission~ 反射/折射~

sparse~ 稀疏~

stiffness~ 刚度~

~Thomson-Haskell *method* ~Thomson-Haskell法

transposition~ ~转置

Maximum likelihood 最大似然率

Metric tensor 度量张量

Midpoint scheme 中点法

Minor 子式的

  ~matrix method ~矩阵法

  algebra of~ ~代数

  ~differential equation ~微分方程

  ~vector ~矢量

Modal poles 振型极点

Mode 振型

  leaky~ 漏能~

  normal~ 简正~

  radial~ 径向~

  spheroidal~ 球状~

  toroidal~ 扭转~

Model 模型

  Block construction~ 块状结构~

  ~box ~范围框

  multicomponent~ 多分量~

  piecewise smooth~ 按段光滑~

  plane layered~ 平面成层~

  PREM~ PREM~

  transversely isotropic~ 横向各向同性~

  upper mantle~ 上地幔~

  ~velocity ~速度

Moment tensor 矩张量

Multifold path integral method 多折路径积分法

Multiple reflection 多次反射

NIP 一般射线追踪

  ~profile ~剖面

  ~ray ~射线

  ~ray edge diffracted 边缘衍射的~射线

Nodal 节点的

  ~plane ~平面

  ~region 区

Node 节点

  finite element~ 有限元~

  optimal spacing~ 最佳分割~

Normalization of eigenvectors 本征矢量归一化

Normal mode 简正振型

Parallel ray tracing 平行射线追踪

Paraxial approximation 旁轴近似

  ~matrix ~矩阵

  ~rays ~射线

  two-point ray tracing~ 两点射线追踪~

  ~travel times ~走时

Particle motion diagram 质点运动图

Pearcey *function* Pearcey函数

Perturbation 扰动

  ray theoretical~ 射线理论~

  ~theory ~理论

  ~travel time to first order ~一阶走时

Phase integral 相积分

Phase velocity 相速度

Plane harmonic 平面调和

Plunge 俯角

Polarity 极性

Polarization 极化

~angle ~角

~vector ~矢量

Potential energy 位能

PREM PREM地球模型

Principal axes 主轴

Probability model 概率模型

Projection operator 投影算子

Projector 投影仪

Propagator matrix 传递矩阵

ray theoretical~ 射线理论~

Pseudoinverse 伪逆

Pseudorank 伪秩

Q （品质因子符号）

Quadrature 求积

Gauss-Legendre~ Gauss-Legendre~

Filon Filon~

Quasiphotons 准光子

Quasilongitudinal 准纵向

Quasitransverse 准横向

Quelling 压平

QR *factorization* QR因子化

Radial mode 径向振型

Radiation pattern 辐射花样

Rake 倾伏

Rational approximation 有理近似

Ray 射线

~amplitude ~幅度

~centred coordinates ~中心坐标

~code ~编码

~coordinates ~坐标

~definition ~定义

~dynamic tracing ~动力学追踪

~expansion ~展开式

~generalized spreading Jacobian ~广义扩散 Jacobi算子

Green *function* Green函数

~parallel tracing ~平行追踪

~parameter ~参数

paraxial~ 旁轴~

propagator matrix~ ~传递矩阵

spreading Jacobian ~扩散Jacobi算子

~synthetic seismogram ~合成地震图

~tracing ~追踪

~two-point tracing ~二点追踪

Rayleigh

~principle ~原理

~quotient ~商

~wave ~波

Rayleigh-Ritz *algorithm* Rayleigh-Ritz算法

Reflection 反射

Reflection/transmission

反射/折射

~*coefficients* ~系数

~*generalized coefficients* ~广义系数

~*matrices* ~矩阵

~*matrix addition rule* ~矩阵加法

~*matrix recursive construction* ~矩阵循环结构

Reflectivity 反射率

~*method* ~法

Reverberation operator 回响算子

Rotation 转动

~Givens *matrices* ~Givens矩阵

Householder~ Householder~

~*of coordinates with spherical harmonics* 有球调和的坐标系~

Rotational splitting 转动分裂

Runge-Kutta Runge-Kutta法

Saddle point 鞍点

Sequential accumulation 顺序堆积

Shadow boundary 阴影边界

Shear dislocation 剪切位错

Shooting method 投射法

Simultaneous iterative reconstruction 齐次迭代重建

Singular 奇异的

~*dynamic ray tracing* ~动力学射线追踪

~*region* ~域

Singular value decomposition 奇异值分解

~*algorithms* ~算法

Singular values 奇异值

Singular vectors 奇异矢量

Slip vector 滑移矢量

Slowness 慢度

~*method* ~法

~*surface* ~曲面

vertical~ 垂直~

Source 震源

~*moment tensor* ~矩张量

~*radiation pattern* ~辐射花样

~*reference coordinate system* ~参考坐标系

~*vectors* ~矢量

Sparse least squares inversion 稀疏最小二乘方反演

~*algebraic reconstruction* ~代数重建

~*conjugate gradient* ~共轭梯度

~Dines *and* Lytle *algorithm* ~Dines和Lytle算法

~Lanczcs *algorithm* ~Lanczos算法

~*simultaneous iterative reconstruction* ~齐次迭代重建

Spectral method 波谱法
Spherical 球的
  ~Bessel *function* ~Bessel函数
  ~*harmonics* ~调和
  ~*polar coordinate system* ~极坐标系
  ~*vector harmonics* ~矢量调和
Spherical modes 球状振型
Spline 样条
  B-*spline* B~
  H-*spline* H~
  ~*interpolation* ~内插
Split stratification 分裂成层
Spreading 扩散
  geometrical 几何~
  ~*matrix* ~矩阵
  ~Jacobian ~Jacobi算子
Static problem 静力学问题
Stress-displacement vector 应力-位移矢量
Strike 走向
Strike-slip 走滑
Sturm *count* Sturm数
Surface wave 面波
  Love~ Love~
  Rayleigh~ Rayleigh~
Synthetic seismogram 合成地震图
  ray theoretical~ 射线理论~
Tau function τ函数
Thomson-Haskell *matrix method* Thomson-Haskell矩阵法

Time stepping 时间分段
Tomography 层析
Toroidal mode 扭转振型
Transform 变换
  annulling~ 非零~
  Fourier-Bessel~ Fourier-Bessel~
  Hilberl~ Hilbert~
  Householder~ Householder~
  ~*of spherical harmonics* 球调和的~
Transmission 见*Reflection/transmission*条
Transposition 转置
Transverse isotropy 横向各向同性
Trapezoidal integration 梯形积分
  Filon~ Filon~
Travel time 走时
  complex-valued~ 复值~
  first order perturbation~ 一阶扰动~
  paraxial~ 旁轴~
  residual~ 残差~
  ~*second derivatives* ~两阶导数
Triplication 三折线
Turning point 转折点
Two-point problem 两点问题
  ~*ray tracing* ~射线追踪
t^* 衰减介质中修正走时
Upper mantle 上地幔

~model	~模型
~propagation	~传播
Variational principle	变分原理
Vector algorithms	矢量算法
~addition	~加法
~BLAS	~BLAS
~subtraction	~减法
Vectorize	矢量化
Vector spherical harmonics	矢量球调和
Velocity models	速度模型
Wave	波
diffracted~	衍射~
elementary~	基本~
Hamiltonian~	Hamilton~
head~	首~
Wavefront curvature	波前曲率
Wave funtion	波函数
horizontal~	水平~
vertical~	垂直~
Wavenumber	波数
WKBJ *approximation*	WKBJ 近似
~seismogram	~地震图

参考文献

绪 论

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology*, Vols I and II. W. H. Freeman, San Fransisco.

Claerbout, J. F. (1985). *Imaging the Earth's Interior*. Blackwell, Oxford.

Engdahl, E. R. (1984). Documentation of earthquake algorithms. World Data Center A Report SE-35.

Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge University Press.

Menke, W. (1984). *Geophysical data analysis: Discrete Inverse Theory*. Academic Press, Orlando.

Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T. (1986). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press.

Robinson, E. A. (1983). *Multichannel Time Series Analysis*, 2nd edn. Goose Pond Press, Houston.

第一篇第一章

Abo-Zena, A. M. (1979). Dispersion function computations for unlimited frequency values. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **58**, 91–105.

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.

Acton, F. S. (1970). *Numerical Methods That Work*. Harper and Row, New York.

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. Freeman, San Francisco.

Burdick, L. J. and Helmberger, D. V. (1978). Upper mantle P velocity structure of the western United States. *J. Geophys. Res.* **83**, 1699–1712.

Burdick, L. J. and Orcutt, J. A. (1979). A comparison of the generalized ray and reflectivity methods of waveform synthesis. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **58**, 261–278.

Červený, V. and Janský, J. (1983). Ray amplitudes of seismic body waves in inhomogeneous, radially symmetric media. *Stud. Geophys. Geod.* **27**, 9–18.

Chapman, C. H. (1973). The Earth flattening transformation in body wave theory. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **35**, 55–70.

Chapman, C. H. (1974). The turning point of elastodynamic waves. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **39**, 613–622.

Chapman, C. H. (1978). A new method for computing synthetic seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **54**, 481–518.

Choy, G. L. (1977). Theoretical seismograms of core phases calculated by frequency-dependent full wave theory, and their interpretation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **51**, 275–312.

Choy, G. L. and Cormier, V. F. (1983). The structure of the inner core inferred from short-period and broad band data. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **72**, 1–21.
Choy, G. L. and Cormier, V. F. (1986). Direct measurement of the mantle attenuation operator from broadband P and S waves. *J. Geophys. Res.* **91**, 7326–7342.
Choy, G. L., Cormier, V. F., Kind, K., Müller, G. and Richards, P. G. (1980). A comparison of synthetic seismograms of core phases generated by the full wave theory and by the reflectivity method. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **61**, 21–39.
Cormier, V. F. (1980). The synthesis of complete seismograms in an earth model specified by radially inhomogeneous layers. *Bull Seismol. Soc. Am.* **70**, 691–716.
Cormier, V. F. (1986). Synthesis of body waves in transversely isotropic earth models. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **76**, 231–240.
Cormier, V. F. and Choy, G. L. (1981). Theoretical body wave interactions with upper mantle structure. *J. Geophys. Res.* **86**, 1673–1678.
Cormier, V. F. and Richards, P. G. (1976). Comments on "The damping of core waves" by Anthony Qamar and Alfredo Eisenberg. *J. Geophys. Res.* **81**, 3066–3068.
Cormier, V. F. and Richards, P. G. (1977). Full wave theory applied to a discontinuous velocity increase: the inner core boundary. *J. Geophys.* **43**, 3–31.
Doornbos, D. J. (1981). The effect of second-order velocity discontinuities on elastic waves near their turning point. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **64**, 499–511.
Doornbos, D. J., Spiliopoulos. S. and Stacey, F. D. (1986). Seismological properties of D" and the structure of a thermal boundary layer. *Phys. Earth Planet. Int.* **41**, 225–239.
Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L. (1981). Preliminary reference Earth model (PREM). *Phys. Earth Planet. Int.* **25**, 297–356.
Dziewonski, A. M., Hales, A. L. and Lapwood, E. R. (1975). Parametrically simple earth models consistent with geophysical data. *Phys. Earth Planet. Int.* **10**, 12–48.
Frazer. L. N. (1977). Synthesis of shear-coupled PL, Ph.D. thesis, Princeton University.
Frazer, L. N. (1983). Two problems in WKBJ theory: the interpolation of sampled velocity profiles and the use of frequency-dependent, complex velocities. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **75**, 193–211.
Frazer. L. N. and Gettrust, J. F. (1984). On a generalization of Filon's method and the computation of the oscillatory integrals of seismology. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **76**, 461–481.
Gilbert, F. (1976). The representation of seismic displacements in terms of travelling waves. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **44**, 275–280.
Harvey, D. J. (1981). Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **66**, 37–69.
Jeffreys, H. and Jeffreys. B. S. (1965). *Methods of Mathematical Physics*, 3rd edn. Cambridge University Press.
Jeffreys, H and Bullen. K. E. (1958). *Seismological Tables*. Brit. Assn, Gray-Milne Trust.
Kennett, B. L. N. (1974). Reflections, rays and reverberations. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **64**, 1685–1696.

Kennett, B. L. N. (1975). The effects of attenuation on seismograms. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **65**, 1643–1652.
Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge University Press.
Kind, R. (1976). Computation of reflection coefficients for layered media. *J. Geophys.* **42**, 191–200.
Langer, R. E. (1932). On the asymptotic solutions of differential equations, with an application to the Bessel functions of large complex order. *Trans. Am. Math. Soc.* **34**, 447–480.
Langer, R. E. (1949). The asymptotic solutions of ordinary differential equations to the second order, with special reference to a turning point. *Trans. Am. Math. Soc.* **67**, 461–490.
Liu, H.-P., Anderson, D. L. and Kanamori, H. (1976). Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **47**, 41–58.
Love, A. E. H. (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.
Ludwig, D. (1970). Diffraction by a circular cavity. *J. Math. Phys.* **11**, 1617–1629.
Lundquist, G. M. and Cormier, V. F. (1980). Constraints on the absorption band model of Q. *J. Geophys. Res.* **85**, 5244–5256.
Menke, W. H. and Richards, P. G. (1980). Crust–mantle whispering gallery phases: a deterministic model of teleseismic P_n wave propagation. *J. Geophys. Res.* **85**, 5416–5422.
Nussenzweig, H. M. (1965). High frequency scattering by an impenetrable sphere. *Ann. Phys. (NY)* **34**, 23–95.
Olver, F. W. J. (1954). The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A247**, 307–327.
Rial, J. A. and Cormier, V. F. (1980). Seismic waves at the epicenter's antipode. *J. Geophys. Res.* **85**, 2661–2668.
Richards, P. G. (1973). Calculations of body waves for caustics and tunneling in core phases. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **35**, 243–264.
Richards, P. G. (1974). Weakly coupled potentials for high-frequency elastic waves in continuously stratified media. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **64**, 1575–1588.
Richards, P. G. (1976). On the adequacy of plane wave reflection/transmission coefficients in the analysis of seismic body waves. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **66**, 701–717.
Rosenbaum, J. H. (1974). Synthetic microseisms: logging in porous formations. *Geophysics* **39**, 14–32.
Scholte, J. G. J. (1956). On seismic waves in a spherical Earth. *Koninkl. Ned. Meteorol. Inst. Publ.* **65**, 1–55.
Szego, von G. (1934). Über einege asymptotische enwicklungen der Legendreschen funktionen. *Proc. Land. Math. Soc. Ser. 2* **36**, 427–470.
Thomson, C. J. and Chapman, C. H. (1986). End-point contributions to synthetic seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **87**, 285–294.
Woodhouse, J. H. (1978). Asymptotic results for elastodynamic propagator matrices in plane stratified and spherically stratified earth models. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **54**, 263–281.
Woodhouse, J. H. (1981). A note on the calculation of travel times in a transversely isotropic Earth model. *Phys. Earth Planet. Int.* **25**, 357–359.

第一篇第二章

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology: Theory and Methods*. Freeman, San Francisco.

Backus, G. E. and Mulcahy, M. (1976). Moment tensor and other phenomenological descriptions of seismic sources, I. Continuous displacements. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **46**, 341–361.

Ben-Menahem, A. and Singh, S. J. (1981). *Seismic Waves and Sources*. Springer-Verlag, New York.

Borcherdt, R. D. (1973). Energy and plane waves in linear viscoelastic media. *J. Geophys. Res.* **78**, 2442–2453.

Borcherdt, R. D. (1977). Reflection and refraction of type IIS waves in elastic and anelastic media. *Bull. Seismol Soc. Am.* **67**, 43–67.

Borcherdt, R. D. (1982). Reflection and refraction of general P- and type IS waves in elastic and anelastic solids. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **70**, 621–638.

Buchen, P. W. (1971a). Plane waves in linear viscoelastic media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **23**, 531–542.

Buchen, P. W. (1971b). Reflection, transmission and diffraction of *SH*-waves in linear viscoelastic solids. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **25**, 87–113.

Chapman, C. H. (1974). The turning point of elastodynamic waves. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **39**, 613–621.

Chapman, C. H. (1976). A first-motion alternative to geometrical ray theory. *Geophys. Res. Lett.* **3**, 153–156.

Chapman, C. H. (1978). A new method for computing synthetic seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **54**, 481–518.

Chapman, C. H. and Drummond, R. (1982). Body-wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **72**, S277–S317.

Chapman, C. H. and Orcutt, J. A. (1985a). The computation of body wave seismograms in laterally homogeneous media. *Rev. Geophys.* **23**, 105–163.

Chapman, C. H. and Orcutt, J. A. (1985b). Least-squares fitting of marine seismic refraction data. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **82**, 339–374.

Dey-Sarkar, S. K. and Chapman, C. H. (1978). A simple method for the computation of body-wave seismograms. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **68**, 1577–1593.

Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L. (1981). Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Int.* **25**, 297–356.

Futterman, W. I. (1962). Dispersive body waves. *J. Geophys. Res.* **67**, 5279–5291.

Gilbert, F. (1971). Excitation of normal modes of the Earth by earthquake sources. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **22**, 223–226.

Gilbert, F. and Backus, G. E. (1966). Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics* **31**, 326–332.

Kelamis, P. G., Kanasewich, E. R. and Abramovici, F. (1983). Attenuation of seismograms obtained by the Cagniard–Pekeris method. *Geophysics* **48**, 1204–1211.

Kennett, B. L. N. (1974). Reflections, rays and reverberations. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **64**, 1685–1696.

Knopoff, L. (1964). *Q. Rev. Geophys.* **2**, 625–660.

Krebes, E. S. and Hron, F. (1980a). Ray synthetic seismograms for SH waves in anelastic media. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **70**, 29–46.

Krebes, E. S. and Hron, F. (1980b). Synthetic seismograms for SH waves in layered anelastic medium by asymptotic ray theory. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **70**, 2005–2020.
Lockett, F. J. (1962). The reflection and refraction of waves at an interface between viscoelastic media. *J. Mech. Phys. Solids* **10**, 53–64.
Richards, P. G. (1971). Elastic waves in stratified media. *Geophysics* **36**, 798–809.
Schoenberg, M. (1971). Transmission and reflection of plane waves at an elasto-viscoelastic media. *J. Acoust. Soc. Am.* **46**, 649–654.
Takeuchi, M. and Saito, M. (1972). Seismic surface waves. *Meth. Comp. Phys.* **11**, 217–295.
Wiggins, R. A. (1976). Body wave amplitude calculations—II. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **46**, 1–10.

第一篇第三章

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology*, Vol. 1. Freeman, San Francisco.
Backus, G. E. (1964). Geographical interpretation of measurements of average phase velocities of surface waves over great circular and great semi-circular paths. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **54**, 571–610.
Bullen, K. E. (1965). *Introduction to the Theory of Seismology*, 3rd edn. Cambridge University Press.
Bullen, K. E. (1975). *The Earth's Density*. Chapman and Hall, London.
Bullen, K. E. and Bolt, B. A. (1985). *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge University Press, New York.
Creager, K. C. and Jordan, T. H. (1986). Aspherical structure of the core–mantle boundary from PKP travel times. *Geophys. Res. Lett.* **13**, 1497–1500.
Dziewonski, A. M. (1984). Mapping the lower mantle: Determination of lateral heterogeneity in P velocity up to degree and order 6. *J. Geophys. Res.* **89**, 5929–5952.
Dziewonski, A. M. and Gilbert, F. (1976). The effect of small, aspherical perturbations on travel times and a re-examination of the corrections for ellipticity. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **44**, 7–17.
Giardini, D., Li, X. D. and Woodhouse, J. H. (1987). Three-dimensional structure of the Earth from splitting in free-oscillation spectra. *Nature* **325**, 405–411.
Julian, B. R. and Anderson, D. L. (1968). Travel times, apparent velocities and amplitudes of body waves. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **58**, 339–366.
Morelli, A. and Dziewonski, A. M. (1987). Topography of the core–mantle boundary and lateral homogeneity of the liquid core. *Nature* **325**, 678–683.
Woodhouse, J. H. and Dziewonski, A. M. (1984). Mapping the upper mantle: three dimensional modeling of Earth structure by inversion of seismic waveforms. *J. Geophys. Res.* **89**, 5953–5986.

第二篇第一章

Babich, V. M. and Ulin, V. V. (1981). Complex space-time ray method and "quasiphotons". *Mathematical Problems of the Theory of Wave Propagation* (ed. V. M. Babich), pp. 5–12. Nauka, Leningrad. (In Russian.)

Červený, V. (1985a). The application of ray tracing to the numerical modelling of seismic wave fields in complex structures. *Seismic Shear Waves*, Part A: *Theory* (ed. G. Dohr), pp. 1–124. Geophysical Press, London.

Červený, V. (1985b). Gaussian beam synthetic seismograms. *J. Geophys.* **58**, 44–72.

Červený, V. (1985c). Ray synthetic seismograms for complex two-dimensional and three-dimensional structures. *J. Geophys.* **58**, 2–26.

Červený, V. and Pšenčík, I. (1983a). Gaussian beams in two-dimensional elastic inhomogeneous media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **72**, 419–435.

Červený, V. and Pšenčík, I. (1983b). Gaussian beams and paraxial ray approximations in three-dimensional elastic inhomogeneous media. *J. Geophys.* **53**, 1–15.

Červený, V., Molotkov, I. A. and Pšenčík, I. (1977). *Ray Method in Seismology*. Universita Karlova, Praha.

Červený, V., Klimeš, L. and Pšenčík, I. (1984). Paraxial ray approximations in the computation of seismic wave field in inhomogeneous media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **79**, 89–104.

Červený, V., Klimeš, L., Pšenčík, I. and Pleinerová, J. (1987). High-frequency radiation from earthquake sources in laterally varying layered structures. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **88**, 43–79.

Chapman, C. H. and Drummond, R. (1982). Body wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **72**, S277–S317.

Farra, V. and Madariaga, R. (1987). Seismic waveform modelling in heterogeneous media by ray perturbation theory. *J. Geophys. Res.* **92**, 2697–2712.

Gjøystdal, H., Reinhardsen, J. E. and Astebøl, K. (1985). Computer representation of complex 3-D geological structures using a new "solid modeling" technique. *Geophys. Prosp.*, **33**, 1195–1211.

Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge University Press.

Klimeš, L. (1984a). Expansion of a high-frequency time-harmonic wave field given on an initial surface into Gaussian beams. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **79**, 105–118.

Klimeš, L. (1984b). The relation between Gaussian beams and Maslov asymptotic theory. *Stud. Geophys. Geod.* **28**, 237–247.

Klimeš, L. (1985). Computation of seismic wavefields in 3-D media by the Gaussian beam method. Program SW84. Research Report 68. Institute of Geophysics, Charles University, Praha. (In Czech.)

Klimeš, L. (1986). Discretization error for the superposition of Gaussian beams. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **86**, 531–551.

Klimeš, L. (1987). Kinematic hypocentre location. *Acta Montana* **75**, 51–64. (In Czech, English abstract.)

Kravtsov, Y. A. and Orlov, Y. I. (1980). *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*. Nauka, Moscow. (In Russian.)

Popov, M. M. and Pšenčík, I. (1978a). Ray amplitudes in inhomogeneous media with curved interfaces. *Travaux Géophysiques*, Vol. 24 (ed. A. Zátopek), pp. 118–129. Academia, Praha.

Popov, M. M. and Pšenčík, I. (1978b). Computation of ray amplitudes in inhomogeneous media with curved interfaces. *Stud. Geophys. Geod.* **22**, 248–258.

Thompson, C. J. and Chapman, C. H. (1985). An introduction to the Maslov asymptotic method. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **83**, 143–168.

第二篇第二章

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1970). *Handbook of Mathematical Functions*, 10.4.59–60. Dover, New York.

Bertsekas, D. P. (1982). *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, New York.

Bus, J. Ç. P. and Dekker, T. J. (1975). Two efficient algorithms with guaranteed convergence for finding a zero of function. *ACM Trans. Math. Software* 1, 330–345.

Červený, V. (1987). Ray tracing algorithms in 3-dimensional laterally varying layered structures. *Seismic Tomography* (ed. G. Nolet). Reidel, Dordrecht.

Červený, V. and Pšenčík, I. (1983). Gaussian beams and paraxial ray approximation in three-dimensional elastic inhomogeneous media, *J. Geophys.* **53**, 1–15.

Courant, R. and Hilbert, D. (1962). *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 2, Interscience, New York.

Gel'fand, I. M. and Shilov, G. E. (1964). *Generalized Functions*, Vol. 1: *Properties and Operations*. Academic Press, New York.

Gjøystdal, H., Reinhardsen, J. E. and Åstebøl, K. (1984). A flexible user-oriented system for 3D dynamic ray tracing in complex geological structures. NORSAR Contribution 331.

Grant, J. A. and Hitchins, G. D. (1975). Two algorithms for the solution of polynomial equations to limiting machine precision. *Comp. J.* **18**, 258–264.

Hanyga, A. (1980). On the definition of outgoing waves and boundary value problems in anisotropic elasticity. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Terre* **28**, 267–279.

Hanyga, A. (1982). Dynamic ray tracing in anisotropic media. *Tectonophysics* **90**, 243–251.

Hanyga, A. (1983). Linear and non-linear dynamic ray tracing systems and their complex-valued solutions. *Acta Geophys. Polon.* **31**, 243–254.

Hanyga, A. (1984a). Numerical computation of elastic wavefields in anisotropic elastic media in the presence of caustics. *Hybrid Formulation of Wave Propagation and Scattering* (ed. L. B. Felsen), pp. 153–168. Marinus Nijhoff, The Hague.

Hanyga, A. (1984b). Dynamic ray tracing on Lagrangian manifolds. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **79**, 51–63.

Hanyga, A. (1984c). Transport equations for an anisotropic elastic medium in the presence of caustics. *Gerlands Beitr. Geophys. (Leipzig)* **93**, 261–286.

Hanyga, A. (1984d). Point source solution in anisotropic elastic medium. *Gerlands Beitr. Geophys. (Leipzig)* **93**, 463–479.

Hanyga, A. (1986). Gaussian beams in anisotropic media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **85**, 473–504.

Hanyga, A. (1987). *Linear and Nonlinear DRT*. Report Seismological Observatory. University of Bergen Seismo-Series.

Hanyga, A. (1988) Boundary effects in asymptotic diffraction theory (in preparation).

Hanyga, A. and Seredyńska, M. (1988). Diffracted seismic pulses in the vicinity of simple caustics and caustic cusps (in preparation).

Hanyga, A., Lenartowicz, E. and Pajchel, J. (1984). *Seismic Waves in the Earth*. Elsevier, Amsterdam.

Julian, B. and Gubbins, D. (1975). Two-point seismic ray tracing. *Trans. AGU* **56**, 1027–1032.

Kamel, A. and Felsen, L. B. (1981). Hybrid ray-mode formulation of SH motion in a two-layer half-space. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **71**, 1763–1781.
Keller, H. B. and Perozzi, D. (1983). Fast seismic ray tracing. *SIAM J. Appl. Maths* **43**, 981–992.
Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C. (1970). *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York.
Pereyra, V., Lee, W. H. K. and Keller, H. B. (1980). Solving two-point seismic-ray tracing problems in a heterogeneous medium, Part 1. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **70**, 79–99.
Polak, E. (1974). A globally converging secant method with applications to boundary value problems. *SIAM J. Numer. Anal.* **11**, 529–537.
Popov, M. M. and Pšenčík, I. (1976). Ray amplitudes in inhomogeneous media with curved interfaces. *Geophys. Sb.*, Vol. 24 (ed. A. Zátopek), pp. 118–129. Academia, Praha.
Powell, M. J. D. (1970). A hybrid method for non-linear equations. *Numerical Methods for Non-linear Algebraic Equations* (ed. P. Rabinowitz). Gordon and Breach, New York.
Powell, M. J. D. (1981). *Approximation Theory and Methods*, Section 5.5. Cambridge University Press.
Roberts, S. M. and Shipman, J. (1972). *Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods*. Elsevier, New York.

第三篇第一章

Baag, C.-E. and Langston, C. A. (1985). A WKBJ spectral method for the computation of SV synthetic seismograms in a cylindrically symmetric medium. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **80**, 387–417.
Booth, D. C. and Crampin, S. (1983). The anisotropic reflectivity technique: theory. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **72**, 755–766.
Chapman, C. H. (1978). A new method of computing synthetic seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **54**, 431–518.
Chapman, C. H. and Orcutt, J. A. (1985). The computation of body wave synthetic seismograms in laterally homogeneous media. *Rev. Geophys.* **23**, 105–163.
Cormier, V. and Richards, P. G. (1977). Fullwave theory applied to a discontinuous velocity increase: the inner core boundary. *J. Geophys.* **43**, 3–31.
Douglas, A., Hudson, J. A. and Blamey, C. (1973). A quantitative estimate of teleseismic radiation III—Computed P and Rayleigh wave seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **28**, 345–410.
Dziewonski, A. M., Franzen, J. E. and Woodhouse, J. H. (1986). Centroid-moment tensor solutions for July–September 1985. *Phys. Earth. Planet. Int.* **42**, 205–214.
Fryer, G. J. and Frazer, L. N. (1984). Seismic waves in stratified anisotropic media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **78**, 691–710.
Fuchs, K. and Müller, G. (1971). Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **23**, 417–433.
Grand, S. and Helmberger, D. V. (1984). Upper mantle shear structure of North America. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **76**, 399–438.

Helmberger, D. V. and Harkrider, D. (1978). Modelling earthquakes with generalised ray theory. *Modern Problems in Elastic Wave Propagation* (ed. J. Miklowitz and J. D. Achenbach), pp. 455–518, Wiley, New York.
Kennett, B. L. N. (1980). Seismic waves in a stratified half space II—Theoretical seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **61**, 1–10.
Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media.* Cambridge University Press.
Kennett, B. L. N. (1985). On regional S. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **75**, 1077–1086.
Kennett, B. L. N. (1986). Wavenumber and wavetype coupling in laterally heterogeneous media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **87**, 313–331.
Kennett, B. L. N. and Kerry, N. J. (1979). Seismic waves in a stratified half space. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **57**, 557–583.
Kennett, B. L. N. and Illingworth, M. R. (1981). Seismic waves in a stratified half space III—Piecewise smooth models. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **66**, 633–675.
Langston, C. A. and Helmberger, D. V. (1975). A procedure for modelling shallow dislocation sources. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **42**, 117–130.
Müller, G. (1971). Approximate treatment of elastic body waves in media with spherical symmetry. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **23**, 435–449.
Müller, G. (1985). The reflectivity method: a tutorial. *J. Geophys.* **58**, 153–174.

第三篇第二章

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology*, Vol. 1. W. H. Freeman, San Francisco.
Ascher, U. and Spudich, P. (1986). A hybrid collocation method for calculating complete theoretical seismograms in vertically varying media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **86**, 19–40.
Ascher, U. and Weiss, R. (1984). Collocation for singular perturbation problems II: linear first order systems without turning points. *Math. Comp.* **43**, 157–187.
Ascher, U., Christiansen, J. and Russell, R. D. (1979). A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems. *Math. Comp.* **33**, 659–679.
Chapman, C. H. (1974). The turning point of elastodynamic waves. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **39**, 613–621.
Chapman, C. H. (1976). Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **46**, 201–234.
Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media.* Cambridge University Press.
Olson, A. H., Orcutt, J. A. and Frazier, G. A. (1984). The discrete wavenumber/finite element method for synthetic seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **77**, 421–460.
Phinney, R. A. (1965). Theoretical calculations of the spectra of first arrivals in layered elastic mediums. *J. Geophys. Res.* **70**, 5107–5123.
Richards, P. G. (1971). Elastic wave solutions in stratified media. *Geophysics* **36**, 798–809.
Richards, P. G. and Frasier, C. W. (1976). Scattering of elastic waves from depth-dependent inhomogeneities. *Geophysics* **41**, 441–458.

Schwab, F. and Knopoff, L. (1972). Fast surface wave and free mode computations. *Methods of Computational Physics*, Vol. 11 (ed. B. A. Bolt), pp. 87–180. Academic Press, New York.
Spudich, P. and Ascher, U. (1983). Calculation of complete theoretical seismograms in vertically varying media using collocation methods. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **75**, 101–124.
Takeuchi, H. and Saito, M. (1972). Seismic surface waves. *Methods of Computational Physics*, Vol. 11 (ed. B. A. Bolt), pp. 217–295. Academic Press, New York.

第三篇第三章

Allen, E. E. (1954). Analytical approximations. *MTAC* **8**, 240–241.
Berryhill, J. R. (1979). Wave equation datuming. *Geophysics* **44**, 1329–1344.
Bouchon, M. and Aki, K. (1977). Discrete wavenumber representation of seismic source wavefields. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **67**, 257–277.
Burdick, L. J. and Salvado, C. A. (1986). Modeling body wave amplitude fluctuations using the three-dimensional slowness method. *J. Geophys. Res.* **91**, 12482–12496.
Chapman, C. H. (1978). A new method for computing synthetic seismograms. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **54**, 481–518.
Chapman, C. H. and Drummond, R. (1982). Body wave seismograms in inhomogeneous media using Maslov asymptotic theory. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **72**, 5277–5317.
Choy, G. L. (1977). Theoretical seismograms of core phases calculated by frequency-dependent full wave theory and their implications. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **51**, 275–311.
Clenshaw, C. W. and Curtis, A. R. (1960). A method for numerical integration on an automatic computer. *Numer. Maths* **2**, 197–205.
Cormier, V. F. and Richards, P. G. (1977). Full wave theory applied to a discontinuous velocity increase: the inner-core boundary. *J. Geophys.* **43**, 3–22.
Dahlquist, G. and Bjorck, A. (1974). *Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
Davis, J. and Rabinowitz, P. (1984). *Methods of Numerical Integration*, 2nd edn. Academic Press, New York.
de Hoop, A. T. (1960). A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Appl. Sci. Res.* **B8**, 349–356.
Dey-Sarkar, S. K. and Chapman, C. H. (1978). A simple method for the computation of body wave synthetic seismograms. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **68**, 1577–1593.
Filon, L. N. G. (1928). On a quadrature method for trigonometric integrals. *Proc. R. Soc. Edin.* **49**, 38–47.
Frazer, L. N. (1977). Synthesis of shear-coupled PL. Ph.D. thesis, Princeton University.
Frazer, L. N. (1983). Two problems in WKBJ theory: the interpolation of sampled velocity profiles and the use of frequency-dependent, complex velocities. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **72**, 193–211.
Frazer, L. N. (1986). Applications of multifold Kirchhoff–Helmholtz path integrals to sound propagation in the ocean. Part I: Theory. *J. Acoust. Soc. Am.* **79**, 1748–1759

Frazer, L. N. (1987). Synthetic seismograms using multi-fold path integrals—I. Theory. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **77**, 621–646.

Frazer, L. N. and Gettrust, J. F. (1984). On a generalization of Filon's method and the computation of the oscillatory integrals of seismology. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **76**, 461–481.

Frazer, L. N. and Phinney, R. A. (1980). A theory for the computation of finite frequency synthetic seismograms in an inhomogeneous medium. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **63**, 691–717.

Frazer, L. N. and Sinton, J. B. (1984). A Kirchhoff method for the computation of finite-frequency body wave synthetic seismograms in laterally inhomogeneous media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **78**, 413–429.

Fryer, G. J. (1981). A slowness approach to the reflectivity method of seismogram synthesis. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **63**, 747–758.

Fuchs, K. and Müller, G. (1971). Computation of synthetic seismograms by the reflectivity method and comparison with observations. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **23**, 417–433.

Hilterman, F. J. (1970). Three-dimensional seismic modeling. *Geophysics* **35**, 1020–1037.

Hilterman, F. J. (1975). Amplitudes of seismic waves—a quick look. *Geophysics* **40**, 745–762.

Jeffreys, H. (1965). Damping of S-waves. *Nature* **208**, 675.

Jeffreys, H. (1967). Radius of the Earth's core. *Nature* **215**, 1365–1366.

Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media.* Cambridge University Press.

Kinney, W. A., Clay, C. S. and Sandness, G. A. (1983). Scattering from a corrugated surface: comparison between experiment, Helmholtz–Kirchhoff theory, and the facet ensemble method. *J. Acoust. Soc. Am.* **73**, 183–194.

Levin, D. (1982). Procedures for computing one- and two-dimensional integrals of functions with rapid irregular oscillations. *Math. Comp.* **38**, 531–538.

Liu, H.-P., Anderson, D. L. and Kanamori, H. (1976). Velocity dispersion due to anelasticity: implications for seismology and mantle composition. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **47**, 41–58.

Mallick, S. and Frazer, L. N. (1987). Practical aspects of reflectivity modeling. *Geophysics* **52**, 1355–1364.

O'Hara, H. and Smith, F. J. (1969). The evaluation of definite integrals by interval subdivision. *Comput. J.* **12**, 179–182.

Oliver, J. (1971). A practical strategy for the Clenshaw–Curtis quadrature method. *J. Inst. Math. Applics* **8**, 53–56.

Olver, F. W. J. (1972). Bessel functions of integer order. *Handbook of Mathematical Functions* (ed. M. Abramowitz and I. A. Stegun). National Bureau of Standards.

Phinney, R. A. (1965). Theoretical calculations of the spectra of first arrivals in layered elastic mediums. *J. Geophys. Res.* **70**, 5107–5123.

Piessens, R. and Branders, M. (1983). Modified Clenshaw–Curtis method for the computation of Bessel function integrals. *BIT* **23**, 370–381.

Richards, P. G. (1973). Calculation of body waves for caustics and tunnelling in core phases. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **35**, 243–264.

Sen, M. K. and Frazer, L. N. (1985). Kirchhoff–Helmholtz reflection seismograms in a laterally inhomogeneous multi-layered elastic medium—II: Computations. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **82**, 415–437.

Sen, M. K. and Frazer, L. N. (1987). Synthetic seismograms using multifold path integrals—II. Computations. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **77**, 647–671.

Sen, M. K., Frazer, L. N. and Chapman, N. R. (1988). Analysis of multipath sound propagation in the ocean near 50°N, 128°W. *J. Acoust. Soc. Am.* (in press).

Sinton, J. B. and Frazer, L. N. (1982). A method for the computation of finite frequency body wave synthetic seismograms in laterally varying media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **71**, 37–55.

Spudich, P. and Ascher, U. (1983). Calculation of complete theoretical seismograms in vertically varying media using collocation methods. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **75**, 101–124.

Spudich, P. and Frazer, L. N. (1984). Use of ray theory to calculate high-frequency radiation from earthquake sources having spatially variable rupture velocity and stress drop. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **74**, 2061–2082.

Strick, E. (1970). A predicted pedestal effect for pulse propagation in constant-Q solids. *Geophysics* **35**, 387–402.

Wiggins, R. A. (1974). Body wave amplitude calculations—II. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **46**, 1–10.

Xu, P.-C. and Mal, A. K. (1985). An adaptive integration scheme for irregularly oscillatory functions. *Wave Motion* **7**, 235–243.

第四篇第一章

Abo-Zena, A. (1979). Dispersion function computations for unlimited frequency values. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **58**, 91–105.

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology*. W. H. Freeman, San Francisco.

Dahlen, F. A. (1968). The normal modes of a rotating, elliptical Earth. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **16**, 329–367.

Dunkin, J. W. (1965). Computation of modal solution in layered, elastic media at high frequencies. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **55**, 335–358.

Gilbert, F. and Backus, G. E. (1966). Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics* **31**, 326–332.

Harvey, D. J. (1981). Seismogram synthesis using normal mode superposition: the locked mode approximation. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **66**, 37–69.

Ng, B. S. and Reid, W. H. (1979a). An initial value method for eigenvalue problems using compound matrices. *J. Comp. Phys.* **30**, 125–136.

Ng, B. S. and Reid, W. H. (1979b). A numerical method for linear two-point boundary-value problems using compound matrices. *J. Comp. Phys.* **33**, 70–85.

Takeuchi, H. and Saito, M. (1972). Seismic surface waves. *Methods in Computational Physics*, Vol. 11 (ed. B. A. Bolt), pp. 217–295. Academic Press, New York.

第四篇第二章

Alterman, Z., Jarosch, H. and Pekeris, C. L. (1959). Oscillations of the Earth. *Proc. R. Soc. Lond.* **A252**, 80–95.

Buland, R. (1976). Retrieving the seismic moment tensor. Ph.D. thesis, University of California, San Diego.

Buland, R. and Gilbert, F. (1984). Computation of free oscillations of the Earth. *J. Comp. Phys.* **54,** 95–114.

Chapman, C. H. and Woodhouse, J. H. (1981). Symmetry of the wave equation and excitation of body waves. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **65,** 777–782.

Coddington, E. A. and Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York.

Gantmacher, F. R. (1959). *The Theory of Matrices.* Chelsea, New York.

Gilbert, F. (1971). Excitation of normal modes of the Earth by earthquake sources. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **22,** 223–226.

Gilbert, F. and Backus, G. E. (1966). Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics* **31,** 326–333.

Gilbert, F. and Backus, G. E. (1969). A computational problem encountered in a study of the Earth's normal modes. *Proc. Fall Joint Computer Conf., 1968, of Am. Federation of Information Processing Society*, pp. 1273–1277.

Martin, R. S. and Wilkinson, J. H. (1967). Solution of symmetric and unsymmetric band equations and the calculation of eigenvectors of band matrices. *Numer. Maths* **9,** 279–301.

Pekeris, C. L. and Jarosch, H. (1958). The free oscillations of the Earth. *Contributions in Geophysics in Honor of Beno Gutenberg* (ed. E. Ingerson), pp. 171–192. Pergamon, New York.

Peters, G. and Wilkinson, J. H. (1969). Eigenvalues of $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ with band symmetric $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$. *Comput. J.* **12,** 398–404.

Takeuchi, H. and Saito, M. (1972). Seismic surface waves. *Methods in Computational Physics*, Vol. 11 (ed. B. A. Bolt), pp. 217–295. Academic Press, New York.

Woodhouse, J. H. (1980). Efficient and stable methods for performing seismic calculations in stratified media. *Physics of the Earth's Interior; Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi"*, Course LXXVIII, pp. 127–151. North-Holland, Amsterdam.

Woodhouse, J. H. (1981). The calculation of the complete normal mode spectrum of the Earth using finite difference methods. Seismic Discrimination Semiannual Technical Summary, Lincoln Laboratory, MIT, 31 March 1981.

第四篇第三章

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1968). *Handbook of Mathematical Functions* US Government Printing Office, Washington, DC.

Barth, W., Martin, R. S. and Wilkinson, J. H. (1971). Calculation of the eigenvalues of a symmetric tridiagonal matrix by the method of bisection. *Linear Algebra* (ed. J. H. Wilkinson and C. Reinsch), pp. 249–256, Springer-Verlag, New York.

Birkhoff, G., De Boor, C., Swartz, B. and Wendroff, B. (1966). Rayleigh–Ritz approximation by piecewise cubic polynomials. *SIAM J. Numer. Anal.* **3,** 188–203.

Buland, R. and Gilbert, F. (1984). Computation of free oscillations of the Earth. *J. Comp. Phys.* **54,** 95–114.

Carrier, G. F., and Pearson, C. E. (1976). *Partial Differential Equations: Theory and Technique*. Academic Press, New York.

Dziewonski, A. M. and Anderson, D. L. (1981). Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.* **25,** 297–356.

Goldstein, H. (1950). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
Jeffreys, H. and Jeffreys, B. S. (1966). *Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press.
Martin, R. S. and Wilkinson, J. H. (1971a). Reduction of the symmetric eigenproblem $Ax = \lambda Bx$ and related problems to standard form. *Linear Algebra* (ed. J. H. Wilkinson and C. Reinsch), pp. 303–314. Springer-Verlag, New York.
Martin, R. S. and Wilkinson, J. H. (1971b). Solution of symmetric and unsymmetric band equations and the calculation of eigenvectors of band matrices. *Linear Algebra* (ed. J. H. Wilkinson and C. Reinsch), pp. 70–92. Springer-Verlag, New York.
Martin, R. S., Peters, G. and Wilkinson, J. H. (1971a). Symmetric decomposition of a positive definite matrix. *Linear Algebra* (ed. J. H. Wilkinson and C. Reinsch), pp. 9–30. Springer-Verlag, New York.
Martin, R. S., Reinsch, C. and Wilkinson, J. H. (1971b). Householder's tridiagonalization of a symmetric matrix. *Linear Algebra* (ed. J. H. Wilkinson and C. Reinsch), pp. 212–226. Springer-Verlag, New York.
Mathews, J. and Walker, R. L. (1965). *Mathematical Methods of Physics*. Benjamin, New York.
Morse, P. M. and Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, Part II. McGraw-Hill, New York.
Pekeris, C. L. and Jarosch, H. (1958). The free oscillations of the Earth. *Contributions in Geophysics in Honor of Beno Gutenberg* (ed. E. Ingerson), pp. 171–192, Pergamon, New York.
Peters, G. and Wilkinson, J. H. (1969). Eigenvalues of $Ax = \lambda Bx$ with band symmetric A and B. *Comput. J.* **12**, 398–404.
Peters, G. and Wilkinson, J. H. (1971). The calculation of specified eigenvectors by inverse iteration. *Linear Algebra* (ed. J. H. Wilkinson and C. Reinsch), pp. 418–439. Springer-Verlag, New York.
Rayleigh, J. W. S. (1877). *The Theory of Sound*, Vol. I. Dover, New York.
Schwarz, H. R. (1971). Tridiagonalization of a symmetric band matrix. *Linear Algebra* (ed. J. H. Wilkinson and C. Reinsch), pp. 273–283. Springer-Verlag, New York.
Wiggins, R. A. (1976). A fast, new computational algorithm for free oscillations and surface waves. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **47**, 135–150.
Wilkinson, J. H. (1965). *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford.
Wilkinson, J. H. and Reinsch, C. (eds) (1971). *Linear Algebra*. Springer-Verlag, New York.
Zienkiewicz, O. C. (1967). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, New York.

第五第第一章

Backus, G. E. (1970). Inference from inadequate and inaccurate data, II. *Proc. Natl. Acad. Sci.* **65**, 281–287.
Backus, G. E. and Gilbert, F. (1968). The resolving power of gross Earth data. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **16**, 169–205.

Backus, G. E. and Gilbert, F. (1969). Constructing P-velocity models to fit restricted sets of travel time data. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **59**, 1407–1414.

Backus, G. E. and Gilbert, F. (1970). Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A266**, 123–192.

Ben-Israel, A. and Greville, T. N. E. (1974). *Generalized Inverses: Theory and Applications*. Wiley, New York.

Chou, C. W. and Booker, J. R. (1979). A Backus–Gilbert approach to inversion of travel-time data for three-dimensional velocity structure. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **59**, 325–344.

Clayton, R. W. and Comer, R. P. (1983). A tomographic analysis of mantle heterogeneities from body wave travel times (abstract). *EOS Trans. Am. Geophys. Union* **64**, 776.

Dines, K. A. and Lytle, R. J. (1979). Computerized geophysical tomography. *Proc. IEEE* **67**, 1065–1073.

Dongarra, J. J., Moler, C. B., Bunch, J. R. and Stewart, G. W. (1979). *LINPACK User's Guide*. SIAM, Philadelphia.

Fawcett, J. A. and Clayton, R. W. (1984). Tomographic reconstruction of velocity anomalies. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **74**, 2201–2219.

Gentleman, W. M. (1973). Least squares computation by Givens transformations without square roots. *J. Inst. Maths Applics* **12**, 329–336.

Golub, G. H. and Reinsch, C. (1970). Singular value decomposition and least squares solutions. *Numer. Maths* **14**, 403–420.

Herman, G. T. (1980). *Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography*. Academic Press, New York.

Humphreys, E., Clayton, R. W. and Hager, B. H. (1984). A tomographic image of mantle structure beneath southern California. *Geophys. Res. Lett.* **11**, 625–627.

Jordan, T. H. and Sverdrup, K. A. (1981). Teleseismic location techniques and their application to earthquake clusters in the south-central Pacific. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **71**, 1105–1130.

Lanczos, C. (1961). *Linear Differential Operators*. Van Nostrand Reinhold, New York.

Lawson, C. H. and Hanson, R. J., (1974). *Solving Least Squares Problems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Lawson, C., Hanson, R., Kincaid, D. and Krogh, F. (1979a). Basic linear algebra subroutines. *ACM Trans. Math. Software.* **5**, 308–371.

Lawson, C., Hanson, R., Kincaid, D. and Krogh, F. (1979b). ALGORITHM 539, Basic linear algebra subroutines. *ACM Trans. Math. Software.* **5**, 308–325.

Nolet, G. (1985). solving and resolving inadequate and noisy tomographic systems. *J. Comp. Phys.* **61**, 463–482.

Olson, A. H. (1987). A Chebyshev condition for accelerating convergence of iterative tomographic methods solving large least squares problems. *Phys. Earth Planet. Inter.* (Submitted).

Paige, C. C. and Saunders, M. A. (1982a). LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Trans. Math. Software.* **8**, 43–71.

Paige, C. C. and Saunders, M. A. (1982b). ALGORITHM 582, LSQR: Sparse linear equations and least squares problems. *ACM Trans. Math. Software.* **8**, 195–209.

Parker, R. L. (1977). Understanding inverse theory. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* **5**, 35–64.

Pavlis, G. L. (1984). Comparison of earthquake travel-time residuals or how to compare apples to oranges. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **74**, 2245–2255.
Pavlis, G. L. (1986). Geotomography using refraction fan shots. *J. Geophys. Res.* **91**, 6522–6534.
Pavlis, G. L. and Booker, J. R. (1980). The mixed discrete continuous inverse problem: Application to the simultaneous determination of earthquake hypocenters and velocity structure. *J. Geophys. Res.* **85**, 4801–4810.
Pavlis, G. L. and Booker, J. R. (1983). Progressive multiple event location. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **73**, 1753–1777.
Pavlis, G. L. and Hokanson, N. B. (1985). Separated earthquake location. *J. Geophys. Res.* **90**, 12777–12789.
Peterson, J. E., Paulsson, B. N. P. and McEvilly, T. V. (1985). Application of algebraic reconstruction techniques to crosshole seismic data. *Geophysics* **50**, 1599.
Spencer, C. and Gubbins, D. (1980). Travel-time inversion for simultaneous earthquake location and velocity structure determination in laterally varying media. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **63**, 95–116.
Stewart, G. W. (1973). *Introduction to Matrix Computations*. Academic Press, New York.
Tarantola, A. and Valette, B. (1982). Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophys. Space Phys.* **20**, 219–232.
Thurber, C. H. and Aki, K. (1987). Three-dimensional seismic imaging. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.* **15**, 115–139.
Willmore, D. L. and Bancroft, A. M. (1960). The time term approach to refraction seismology. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **3**, 419–432.

第五篇第二章

Aki, K. and Richards, P. G. (1980). *Quantitative Seismology*. W. H. Freeman, San Francisco.
Backus, G. E. and Mulcahy, M. (1976). Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources I—Continuous displacements. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **46**, 341–371.
Bullen, K. E. and Bolt, B. A. (1985). *An Introduction to the Theory of Seismology*. Cambridge University Press.
Dziewonski, A. M. and Woodhouse, J. H. (1983). Studies of the seismic source using normal-mode theory, *Earthquakes: Observation, Theory and Interpretation*; *Proc. Intl School of Physics "Enrico Fermi"*, Course LXXXV. (ed. H. Kanamori and E. Boschi), pp. 45–137. North-Holland, Amsterdam.
Dziewonski, A. M., Friedman, A., Giardini, D. and Woodhouse, J. H. (1983). Global seismicity of 1982: centroid moment tensor solutions for 308 earthquakes. *Phys. Earth Planet. Inter.* **33**, 76–90.
Jarosch, H. and Aboodi, E. (1970). Towards a unified notation for source parameters. *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **21**, 513–529.
Kennett, B. L. N. (1983). *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*. Cambridge University Press.

第五篇第三章

Brillinger, D. R., Udías, A. and Bolt, B. A. (1980). A probability model for regional focal mechanism solutions. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **70**, 149–170.
Buforn, E. and Udías, A. (1984). An algorithm for focal mechanism determination using signs of first motion of P, SV and SH waves. *Rev. Geofísica* **40**, 11–26.
Chambers, J. M. (1977). *Computational Methods for Data Analysis*. Wiley, New York.
Stauder, W. (1960). S waves and focal mechanisms: The state of the question. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **50**, 333–346.
Udías, A., Buforn, E., Brillinger, D. and Bolt, B. A. (1982). Joint statistical determination of fault plane parameters. *Phys. Earth Planet. Inter.* **30**, 178–184.

第五篇第三章

Brillinger, D. R., Udías, A. and Bolt, B. A. (1980). A probability model for regional focal mechanism solutions. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **70**, 149–170.

Buforn, E. and Udías, A. (1984). An algorithm for focal mechanism determination using signs of first motion of P, SV and SH waves. *Rev. Geofísica* **40**, 11–26.

Chambers, J. M. (1977). *Computational Methods for Data Analysis*. Wiley, New York.

Stauder, W. (1960). S waves and focal mechanisms: The state of the question. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **50**, 333–346.

Udías, A., Buforn, E., Brillinger, D. and Bolt, B. A. (1982). Joint statistical determination of fault plane parameters. *Phys. Earth Planet. Inter.* **30**, 178–184.